

反射テスト 微分 指数関数と対数微分法 01

1. 次の式を x について微分せよ. (S 級 2 分 20 秒, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分, C 級 7 分)

(1) e^x

(2) e^{2x}

(3) e^{x^3}

(4) a^x

(5) 2^x

(6) $\left(\frac{1}{3}\right)^x$

(7) x^x ($x > 0$)

(8) $(2x)^x$ ($x > 0$)

(9) $a^{\log x}$ ($a > 0$)

2. 次の式を x について微分せよ. (S 級 2 分 20 秒, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分, C 級 7 分)

(1) e^{-x}

(2) e^{-x^3}

(3) 4^x

(4) $\left(\frac{1}{5}\right)^x$

(5) x^{2x} ($x > 0$)

(6) $(\log x)^x$ ($x > 1$)

反射テスト 微分 指数関数と対数微分法 01 解答解説

1. 次の式を x について微分せよ。(S級 2分 20秒, A級 3分 30秒, B級 5分, C級 7分)

(1) e^x

$$(e^x)' = e^x \quad \dots\text{答え}$$

☆微分しても同じ!
こんな関数は唯一無二.

(2) e^{2x}

$$(e^{2x})' = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x} \quad \dots\text{答え}$$

(3) e^{x^3}

$$(e^{x^3})' = e^{x^3} \cdot 3x^2 = 3x^2 e^{x^3} \quad \dots\text{答え}$$

(4) a^x

$$(a^x)' = a^x \log a \quad \dots\text{答え}$$

☆ $\log a$ は自然対数.
つまり底はネイピア数 e .

(5) 2^x

$$(2^x)' = 2^x \log 2 \quad \dots\text{答え}$$

(6) $\left(\frac{1}{3}\right)^x$

$$\begin{aligned} \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}' &= \left(\frac{1}{3}\right)^x \log \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3^x} \log 3^{-1} \\ &= -\frac{\log 3}{3^x} \quad \dots\text{答え} \end{aligned}$$

☆別解

$$\begin{aligned} \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}' &= (3^{-x})' \\ &= 3^{-x} \log 3 \cdot (-1) \\ &= -\frac{\log 3}{3^x} \end{aligned}$$

(7) $x^x \quad (x > 0)$

★対数微分法

$y = x^x$ において対数微分法

両辺の自然対数をとって,

$$\log y = \log x^x$$

両辺を x について微分して,

$$(\log y)' = (x \log x)'$$

$$\frac{y'}{y} = (x)' \log x + x(\log x)'$$

$$\frac{y'}{y} = \log x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{y'}{y} = \log x + 1$$

ゆえに,

$$y' = y(\log x + 1)$$

$$= x^x (\log x + 1) \quad \dots\text{答え}$$

(8) $(2x)^x \quad (x > 0)$

$y = (2x)^x$ として,

両辺の自然対数をとると,

$$\log y = \log(2x)^x$$

両辺を x について微分して,

$$(\log y)' = (x \log 2x)'$$

$$\frac{y'}{y} = (x)' \log 2x + x(\log 2x)'$$

$$\frac{y'}{y} = \log 2x + x \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2$$

$$\frac{y'}{y} = \log 2x + 1$$

ゆえに,

$$y' = y(\log 2x + 1)$$

$$= (2x)^x (\log 2x + 1) \quad \dots\text{答え}$$

(9) $a^{\log x} \quad (a > 0)$

$y = a^{\log x}$ とおく.

両辺の自然対数をとって,

$$\log y = \log a^{\log x}$$

両辺を x について微分して,

$$(\log y)' = (\log x \cdot \log a)'$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{\log a}{x}$$

ゆえに,

$$\begin{aligned} y' &= \frac{y \log a}{x} \\ &= \frac{a^{\log x} \log a}{x} \quad \dots\text{答え} \end{aligned}$$

2. 次の式を x について微分せよ. (S 級 2 分 20 秒, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分, C 級 7 分)

(1) e^{-x}

$$(e^{-x})' = e^{-x} \cdot (-x)' \\ = -e^{-x} \quad \dots \text{答え}$$

(2) e^{-x^3}

$$(e^{-x^3})' = e^{-x^3} \cdot (-3x^2)' \\ = -3x^2 e^{-x^3} \quad \dots \text{答え}$$

☆ 2 階微分すると元に戻る.
コインの表と裏のイメージ.

(3) 4^x

$$(4^x)' = 4^x \log 4 \quad \dots \text{答え}$$

☆ 別表記の解
 $2 \cdot 4^x \log 2$ でもよい.

(4) $\left(\frac{1}{5}\right)^x$

$$\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^x\right\}' = \left(\frac{1}{5}\right)^x \cdot \log \frac{1}{5} \\ = \frac{1}{5^x} \log 5^{-1} \\ = -\frac{\log 5}{5^x} \quad \dots \text{答え}$$

☆ 別解

$$\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^x\right\}' = (5^{-x})' \\ = 5^{-x} \log 5 \cdot (-1) \\ = -\frac{\log 5}{5^x}$$

(5) $x^{2x} \quad (x > 0)$

$y = x^{2x}$ とおく.
両辺の自然対数をとると,
 $\log y = \log x^{2x}$
両辺を x について微分して,
 $(\log y)' = (2x \log x)'$
 $\frac{y'}{y} = (2x)' \log x + 2x(\log x)'$
 $\frac{y'}{y} = 2 \log x + 2x \cdot \frac{1}{x}$
 $\frac{y'}{y} = 2 \log x + 2$

ゆえに,
 $y' = y(2 \log x + 2)$
 $= 2x^{2x}(\log x + 1) \quad \dots \text{答え}$

(6) $(\log x)^x \quad (x > 1)$

$y = (\log x)^x$ とおく.
両辺の自然対数をとると,
 $\log y = \log(\log x)^x$
両辺を x について微分して,
 $(\log y)' = \{x \log(\log x)\}'$
 $\frac{y'}{y} = (x)' \log(\log x) + x \{\log(\log x)\}'$
 $\frac{y'}{y} = \log(\log x) + x \cdot \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x} \quad \leftarrow \because x > 1$
 $\frac{y'}{y} = \log(\log x) + \frac{1}{\log x}$

ゆえに,
 $y' = y \left\{ \log(\log x) + \frac{1}{\log x} \right\}$
 $= (\log x)^x \left\{ \log(\log x) + \frac{1}{\log x} \right\} \quad \dots \text{答え}$
 $= (\log x)^x \log(\log x) + (\log x)^{x-1} \quad \dots \text{答え}$