反射テスト　微分　指数関数　証明　01

1.　関数 $f(x)=e^x$ を x について微分したい. 証明を添えて微分せよ. (S 級 3 分, A 級 5 分, B 級 8 分, C 級 12 分)

ⓒ 数学・算数を楽しむために (http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html)

2.　関数 $f(x) = a^x$ を x について微分したい. ただし a は x に対して定数であり, 1. の証明結果を用いてよい.

（S 級 2 分 40 秒, A 級 5 分, B 級 8 分, C 級 12 分）

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

反射テスト　微分　指数関数　証明　01　解答解説

1.　関数 $f(x) = e^x$ を x について微分したい．証明を添えて微分せよ．（ S 級 3 分，A 級 5 分，B 級 8 分，C 級 12 分 ）

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ ←導関数の定義

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^x \cdot \left(e^h - 1\right)}{h}$$

$$= e^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\left(e^h - 1\right)}{h}$$

$$= e^x \cdot 1$$ ←★証明後述

$$= \boldsymbol{e^x}$$ **…答え**

★ $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ の証明

$t = e^h - 1$ とおくと，　$h \to 0 \quad \Rightarrow \quad t \to 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} &= \lim_{t \to 0} \frac{t}{\log(1+t)} \\
&= \lim_{t \to 0} \left\{ \frac{\log(1+t)}{t} \right\}^{-1} \\
&= \lim_{t \to 0} \left\{ \log(1+t)^{\frac{1}{t}} \right\}^{-1} \\
&= (\log e)^{-1} = 1
\end{aligned}$$

★ 公式　$\boldsymbol{(e^x)' = e^x}$

☆微分しても同じ！こんな関数は唯一無二．

★ 指数関数（ *exponenfial function* ）　$\boldsymbol{\exp x = e^x}$
e^x を $\exp x$ で表すことがある．

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2. 関数 $f(x)=a^x$ を x について微分したい. ただし a は x に対して定数であり, 1. の証明結果を用いてよい.

(S 級 2 分 40 秒, A 級 5 分, B 級 8 分, C 級 12 分)

$a^x=e^t$ とおいて, 両辺の自然対数をとれば,

$\log a^x=\log e^t \quad \Leftrightarrow \quad x\log a=t\log e \quad \Leftrightarrow \quad t=x\log a$

$\therefore \quad f(x)=a^x=e^{x\log a}$ かつ $\dfrac{dt}{dx}=\log a$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad f'(x)&=\frac{d}{dx}\left(e^t\right)\\
&=\frac{d}{dt}\left(e^t\right)\cdot\frac{dt}{dx} \quad \leftarrow \text{☆合成関数の微分}\\
&=e^t\cdot\log a\\
&=\boldsymbol{a^x\log a} \quad \textbf{…答え}
\end{aligned}
$$

☆合成関数の微分 $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{dz}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}$

★ 公式 $\boldsymbol{(a^x)'=a^x\log a}$

ⓒ 数学・算数を楽しむために (http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html)