反射テスト　微分　対数関数　証明　01

1.　関数 $f(x)=\log x$ を x について微分したい. 証明を添えて微分せよ. ただし底はネイピア数 e（自然対数の底）である.

（ S 級 1 分 30 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 8 分 ）

2. 関数 $f(x) = \log|x|$ を x について微分したい. 証明を添えて微分せよ. ただし 1. の証明結果を用いてよい. またこの関数の底はネイピア数 e (自然対数の底) である. (S 級 3 分, A 級 5 分, B 級 8 分, C 級 12 分)

反射テスト　微分　対数関数　証明　01　解答解説

1.　関数 $f(x) = \log x$ を x について微分したい．証明を添えて微分せよ．ただし底はネイピア数 e（自然対数の底）である．

（ S 級 1 分 30 秒，A 級 3 分，B 級 5 分，C 級 8 分 ）

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \leftarrow \text{導関数の定義}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \log \frac{x+h}{x}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{h} \cdot \log\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \lim_{\frac{h}{x} \to 0} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \lim_{t \to 0} \log(1+t)^{\frac{1}{t}} \quad \leftarrow t = \frac{h}{x}$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \log e \quad \leftarrow \text{☆ネイピア数 } e \text{ の定義}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{x}} \quad \cdots \textbf{答え}$$

★ 公式　$(\log x)' = \boldsymbol{\dfrac{1}{x}}$

☆ネイピア数 e の定義　$\displaystyle\lim_{t \to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$

ここでの $\log x$ の底はネイピア数 e である．対数の底が省略されていれば基本的に e と考える．

★ 自然対数 (*natural logarithm*)　$\ln x = \log x$

ネイピア数 e を底とする対数を **自然対数** といい，$\ln x$ を用いて表すことがある．

2.　関数 $f(x)=\log|x|$ を x について微分したい. 証明を添えて微分せよ. ただし 1. の証明結果を用いてよい. またこの関数の底はネイピア数 e (自然対数の底) である.　（ S 級 3 分, A 級 5 分, B 級 8 分, C 級 12 分 ）

真数条件から,　$|x|>0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 0$

①　$x>0$ のとき, h が十分 0 に近ければ, $x+h>0$ であるから,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\log|x+h|-\log|x|}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h)-\log x}{h} \\
&= \frac{1}{x} \quad \leftarrow \because \text{1. の結果}
\end{aligned}$$

②　$x<0$ のとき, h が十分 0 に近ければ, $x+h<0$ であるから,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\log|x+h|-\log|x|}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\log(-x-h)-\log(-x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\cdot\log\frac{-x-h}{-h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\cdot\log\frac{x+h}{h} \\
&= \frac{1}{x} \quad \leftarrow \because \text{1. の結果}
\end{aligned}$$

①, ②の結果より,　$\dfrac{d}{dx}(\log|x|)=\boldsymbol{\dfrac{1}{x}}$　**…答え**

★ 公式　$\boldsymbol{(\log|x|)'=\dfrac{1}{x}}$