反射テスト　微分　三角関数　証明　01

1.　関数 $f(x) = \sin x$ を x について微分したい. 証明を添えて微分せよ.（ S 級 2 分, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分, C 級 7 分 ）

2. 関数 $f(x) = \cos x$ を x について微分したい. 証明を添えて微分せよ.（ S 級 2 分, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分, C 級 7 分 ）

反射テスト　微分　三角関数　証明　01　解答解説

1.　関数 $f(x)=\sin x$ を x について微分したい．証明を添えて微分せよ．（ S 級 2 分，A 級 3 分 30 秒，B 級 5 分，C 級 7 分 ）

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$　←導関数の定義

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}$　←加法定理

$=\lim_{h\to 0}\left\{\cos x\cdot\dfrac{\sin h}{h}+\dfrac{\sin x(\cos h-1)}{h}\right\}$

$=\lim_{h\to 0}\left\{\cos x\cdot\dfrac{\sin h}{h}-\sin x\cdot\dfrac{1-\cos h}{h^2}\cdot h\right\}$

$=\cos x\cdot 1-\sin x\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 0$　←☆三角関数の極限の公式

$=\boldsymbol{\cos x}$　**…答え**

★ 公式　$(\sin x)'=\cos x$

☆三角関数の極限の公式 $\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin h}{h}=1\\[2ex] \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos h}{h^2}=\frac{1}{2}\end{cases}$

2.　関数 $f(x)=\cos x$ を x について微分したい. 証明を添えて微分せよ.（ S 級 2 分, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分, C 級 7 分 ）

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\quad \leftarrow \text{導関数の定義}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}\quad \leftarrow \text{加法定理}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{-\sin x\cdot\frac{\sin h}{h}+\frac{\cos x(\cos h-1)}{h}\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{-\sin x\cdot\frac{\sin h}{h}-\cos x\cdot\frac{1-\cos h}{h^2}\cdot h\right\}$$

$$=-\sin x\cdot 1-\cos x\cdot\frac{1}{2}\cdot 0\quad \leftarrow \text{☆三角関数の極限の公式}$$

$$=\boldsymbol{-\sin x}\quad \textbf{…答え}$$

★ 公式　$(\cos x)'=-\sin x$

☆三角関数の極限の公式 $\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin h}{h}=1\\ \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos h}{h^2}=\frac{1}{2}\end{cases}$

☆余談
$\sin x$ と $\cos x$ の微分の相関関係から, それぞれ 4 階微分をすると元に戻ることがわかる.
この循環性と, 虚数単位の 4 乗 $i^4=1$ に注目したのがオイラーである.
★オイラーの公式　$e^{i\theta}=\cos x+i\sin x$
これに $\theta=\pi$ を代入すると, 数学史上一番美しいと言われる $e^{\pi i}=-1$ という式が生まれる.