

反射テスト 微分 合成関数 基礎 01

1. 次の導関数を求めよ。(S級2分40秒, A級4分, B級6分, C級9分)

(1) $y = 3x - 1$ かつ $z = y^2$ のときの $\frac{dz}{dx}$

(2) $y = x^2 + 2x - 1$ かつ $z = y^3 + y^2$ のときの $\frac{dz}{dx}$

(3) $y = (9x - 5)^3$ のときの $\frac{dy}{dx}$

(4) $y = (x^2 + 1)^3 + 6(x^2 + 1)^2$ のときの $\frac{dy}{dx}$

2. 次の導関数を求めよ。(S級2分40秒, A級4分, B級6分, C級9分)

(1) $y = 5x + 5$ かつ $z = y^2$ のときの $\frac{dz}{dx}$

(2) $y = 3x^2 - 2x + 1$ かつ $z = y^3 + y^2$ のときの $\frac{dz}{dx}$

(3) $y = (3x^2 - 2)^3$ のときの $\frac{dy}{dx}$

(4) $y = (x^2 - 2)^3 - 3(x^2 - 2)^2$ のときの $\frac{dy}{dx}$

反射テスト 微分 合成関数 基礎 01 解答解説

1. 次の導関数を求めよ。(S級2分40秒, A級4分, B級6分, C級9分)

★ 合成関数

y が x の関数で、 z が y の関数であるとき、 z を x で表すことができる。これを **合成関数** という。

例1 $y = 2x$ かつ $z = y^2 \Rightarrow z = (2x)^2$

例2 $y = x^2 + 1$ かつ $z = \log y \Rightarrow z = \log(x^2 + 1)$

★ 合成関数の導関数

y が x の関数で、 z が y の関数であるとき、
$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

ちなみに $\frac{dy}{dx}$ は、「ディーワイ・ディーエックス」と読む。

(1) $y = 3x - 1$ かつ $z = y^2$ のときの $\frac{dz}{dx}$

$$\frac{dz}{dy} = (y^2)' = 2y$$

$$\frac{dy}{dx} = (3x - 1)' = 3$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$= 2y \cdot 3$$

$$= 6y$$

$$= 6(3x - 1) \quad \dots \text{答え}$$

(2) $y = x^2 + 2x - 1$ かつ $z = y^3 + y^2$ のときの $\frac{dz}{dx}$

$$\frac{dz}{dy} = (y^3 + y^2)' = 3y^2 + 2y$$

$$\frac{dy}{dx} = (x^2 + 2x - 1)' = 2x + 2$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$= (3y^2 + 2y) \cdot (2x + 2)$$

$$= 2(x + 1)y(3y + 2)$$

$$= 2(x + 1)(x^2 + 2x - 1) \{3(x^2 + 2x - 1) + 2\}$$

$$= 2(x + 1)(x^2 + 2x - 1)(3x^2 + 6x - 1)$$

(3) $y = (9x - 5)^3$ のときの $\frac{dy}{dx}$

$t = 9x - 5$ とおくと、 $y = t^3$

$$\frac{dy}{dt} = (t^3)' = 3t^2$$

$$\frac{dt}{dx} = (9x - 5)' = 9$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= 3t^2 \cdot 9$$

$$= 27t^2$$

$$= 27(9x - 5)^2 \quad \dots \text{答え}$$

(4) $y = (x^2 + 1)^3 + 6(x^2 + 1)^2$ のときの $\frac{dy}{dx}$

$t = x^2 + 1$ とおくと、 $y = t^3 + 6t^2$

$$\frac{dy}{dt} = (t^3 + 6t^2)' = 3t^2 + 12t$$

$$\frac{dt}{dx} = (x^2 + 1)' = 2x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= (3t^2 + 12t) \cdot 2x$$

$$= 3t(t + 4) \cdot 2x$$

$$= 6x(x^2 + 1)(x^2 + 5) \quad \dots \text{答え}$$

2. 次の導関数を求めよ。(S級2分40秒, A級4分, B級6分, C級9分)

(1) $y = 5x + 5$ かつ $z = y^2$ のときの $\frac{dz}{dx}$

$$\frac{dz}{dy} = (y^2)' = 2y$$

$$\frac{dy}{dx} = (5x + 5)' = 5$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$= 2y \cdot 5$$

$$= 10y$$

$$= 10(5x + 5)$$

$$= 50(x + 1) \quad \dots\text{答え}$$

(2) $y = 3x^2 - 2x + 1$ かつ $z = y^3 + y^2$ のときの $\frac{dz}{dx}$

$$\frac{dz}{dy} = (y^3 + y^2)' = 3y^2 + 2y$$

$$\frac{dy}{dx} = (3x^2 - 2x + 1)' = 6x - 2$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$= (3y^2 + 2y) \cdot (6x - 2)$$

$$= 2(3x - 1)y(3y + 2)$$

$$= 2(3x - 1)(3x^2 - 2x + 1) \{3(3x^2 - 2x + 1) + 2\}$$

$$= 2(3x - 1)(3x^2 - 2x + 1)(9x^2 - 6x + 5)$$

(3) $y = (3x^2 - 2)^3$ のときの $\frac{dy}{dx}$

$$t = 3x^2 - 2 \text{ とおくと, } y = t^3$$

$$\frac{dy}{dt} = (t^3)' = 3t^2$$

$$\frac{dt}{dx} = (3x^2 - 2)' = 6x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= 3t^2 \cdot 6x$$

$$= 18xt^2$$

$$= 18x(3x^2 - 2)^2 \quad \dots\text{答え}$$

(4) $y = (x^2 - 2)^3 - 3(x^2 - 2)^2$ のときの $\frac{dy}{dx}$

$$t = x^2 - 2 \text{ とおくと, } y = t^3 - 3t^2$$

$$\frac{dy}{dt} = (t^3 - 3t^2)' = 3t^2 - 6t$$

$$\frac{dt}{dx} = (x^2 - 2)' = 2x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= (3t^2 - 6t) \cdot 2x$$

$$= 3t(t - 2) \cdot 2x$$

$$= 6x(x^2 - 2)(x^2 - 4)$$

$$= 6x(x + 2)(x - 2)(x^2 - 2) \quad \dots\text{答え}$$