反射テスト　微分　合成関数　証明　01

1.　y が x の関数で，z が y の関数であるとき，$\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx}$ を証明せよ．

（ S 級 3 分 30 秒，A 級 5 分，B 級 9 分，C 級 13 分 ）

2. y が x の関数，z が y の関数，w が z の関数であるとき，$\dfrac{dw}{dx} = \dfrac{dw}{dz} \cdot \dfrac{dz}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx}$ を証明せよ．ただし 1. の結果を用いてもよい．

（ S 級 1 分，A 級 1 分 30 秒，B 級 2 分，C 級 3 分 ）

反射テスト　微分　合成関数　証明　01　解答解説

1.　y が x の関数で，z が y の関数であるとき，$\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{dz}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}$ を証明せよ．

（ S 級 3 分 30 秒，A 級 5 分，B 級 9 分，C 級 13 分 ）

★ 合成関数

y が x の関数で，z が y の関数であるとき，z を x で表すことができる．これを **合成関数** という．

例 1　$y=2x$　かつ　$z=y^2$　$\Rightarrow$　$z=(2x)^2$

例 2　$y=x^2+1$　かつ　$z=\log y$　$\Rightarrow$　$z=\log\left(x^2+1\right)$

証明

$y=f(x)$，$z=g(y)$ とおく．

$$\frac{dz}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{g\left(f(x+h)\right)-g\left(f(x)\right)}{h}$$

ここで，$i=f(x+h)-f(x)$ とおけば，

$$\begin{cases} h\to 0 \quad \Rightarrow \quad i\to 0 \\ f(x+h)=f(x)+i=y+i \end{cases}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dx}&=\lim_{h\to 0}\frac{g\left(y+i\right)-g\left(y\right)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{g\left(y+i\right)-g\left(y\right)}{i}\cdot\frac{i}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{g\left(y+i\right)-g\left(y\right)}{i}\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&=\lim_{i\to 0}\frac{g\left(y+i\right)-g\left(y\right)}{i}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&=g'(y)\cdot f'(x)\\
&=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}
\end{aligned}$$

★ 合成関数の導関数

y が x の関数で，z が y の関数であるとき，　$\boldsymbol{\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{dz}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}}$

ちなみに $\dfrac{dy}{dx}$ は，「ディーワイ・ディーエックス」と読む．

2.　y が x の関数，z が y の関数，w が z の関数であるとき，$\dfrac{dw}{dx} = \dfrac{dw}{dz} \cdot \dfrac{dz}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx}$ を証明せよ．ただし 1. の結果を用いてもよい．
（ S 級 1 分，A 級 1 分 30 秒，B 級 2 分，C 級 3 分 ）

証明

1.の結果から，

$$
\begin{aligned}
\frac{dw}{dx} &= \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \\
&= \frac{dw}{dz} \cdot \left(\frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \right) \\
&= \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}
\end{aligned}
$$

★微分は分数のように扱える．
この証明によって，x の関数 y を微分したもの（導関数）を $\dfrac{dy}{dx}$ と表記することの意味がわかるだろう．微分は分数の約分のような性質を持つ．