

反射テスト 微分 商の導関数 基礎 01

1. $\frac{dy}{dx}$ を求めよ。(S級1分30秒, A級2分20秒, B級4分, C級6分)

(1) $y = \frac{1}{x+3}$

(2) $y = \frac{x+1}{7-x}$

(3) $y = \frac{1}{x^2+x+1}$

(4) $y = \frac{x^2}{x^2-1}$

2. $\frac{dy}{dx}$ を求めよ。(S級1分50秒, A級3分, B級5分, C級8分)

(1) $y = \frac{1}{2x-3}$

(2) $y = \frac{1-x}{2x+3}$

(3) $y = \frac{1}{1-2x-x^3}$

(4) $y = \frac{x^3}{x^3+1}$

反射テスト 微分 商の導関数 基礎 01 解答解説

1. $\frac{dy}{dx}$ を求めよ。(S級 1分30秒, A級 2分20秒, B級 4分, C級 6分)

★ 導関数の表記

x の関数 y の導関数を $\frac{dy}{dx}$, y' などと表す.

また, 関数 $f(x)$ あるとき (この時点でこれは x の関数であることもわかる.),

この導関数を $f'(x)$, $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{df}{dx}$ などと表す.

★ 商の導関数

$$u, v \text{ が } x \text{ の関数であるとき, } \begin{cases} \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \\ \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \end{cases}$$

$$(1) \quad y = \frac{1}{x+3}$$

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{(x+3)'}{(x+3)^2} \\ &= -\frac{1}{(x+3)^2} \quad \dots\text{答え} \end{aligned}$$

☆別解

$(x+3)^{-1}$ と考えて, $(x^n)' = nx^{n-1}$ と合成関数の微分を用いる.

$$(2) \quad y = \frac{x+1}{7-x}$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x+1)' \cdot (7-x) - (x+1) \cdot (7-x)'}{(7-x)^2} \\ &= \frac{1 \cdot (7-x) - (x+1) \cdot (-1)}{(x-7)^2} \\ &= \frac{7-x+x+1}{(x-7)^2} \\ &= \frac{8}{(x-7)^2} \quad \dots\text{答え} \end{aligned}$$

$$(3) \quad y = \frac{1}{x^2+x+1}$$

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2} \\ &= -\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} \quad \dots\text{答え} \end{aligned}$$

$$(4) \quad y = \frac{x^2}{x^2-1}$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^2)' \cdot (x^2-1) - (x^2) \cdot (x^2-1)'}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{2x(x^2-1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 2x - 2x^3}{(x^2-1)^2} \\ &= -\frac{2x}{(x+1)^2(x-1)^2} \quad \dots\text{答え} \end{aligned}$$

☆別解 (こちらの方が早い)

$$y' = \left(1 + \frac{1}{x^2-1}\right)' = -\frac{2x}{(x^2-1)^2}$$

2. $\frac{dy}{dx}$ を求めよ。(S級1分50秒, A級3分, B級5分, C級8分)

$$(1) \quad y = \frac{1}{2x-3}$$

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{(2x-3)'}{(2x-3)^2} \\ &= -\frac{2}{(2x-3)^2} \quad \dots\text{答え} \end{aligned}$$

☆別解

$(2x-3)^{-1}$ と考えて, $(x^n)' = nx^{n-1}$ と合成関数の微分を用いる.

$$(2) \quad y = \frac{1-x}{2x+3}$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(1-x)' \cdot (2x+3) - (1-x) \cdot (2x+3)'}{(2x+3)^2} \\ &= \frac{-1 \cdot (2x+3) - (1-x) \cdot 2}{(2x+3)^2} \\ &= \frac{-2x-3-2+2x}{(2x+3)^2} \\ &= -\frac{5}{(2x+3)^2} \quad \dots\text{答え} \end{aligned}$$

$$(3) \quad y = \frac{1}{1-2x-x^3}$$

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{(1-2x-x^3)'}{(1-2x-x^3)^2} \\ &= -\frac{-2-3x^2}{(1-2x-x^3)^2} \\ &= \frac{2+3x^2}{(1-2x-x^3)^2} \quad \dots\text{答え} \end{aligned}$$

$$(4) \quad y = \frac{x^3}{x^3+1}$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^3)' \cdot (x^3+1) - (x^3) \cdot (x^3+1)'}{(x^3+1)^2} \\ &= \frac{3x^2(x^3+1) - x^3 \cdot 3x^2}{(x^3+1)^2} \\ &= \frac{3x^5+3x^2-3x^5}{(x^3+1)^2} \\ &= \frac{3x^2}{(x+1)^2(x^2-x+1)^2} \quad \dots\text{答え} \end{aligned}$$

☆別解 (こちらの方が早い)

$$y' = \left(1 - \frac{1}{x^3+1}\right)' = -\left(-\frac{3x^2}{(x^3+1)^2}\right)$$