反射テスト　微分　積・商の導関数　証明　01

1.　$y = f(x) \cdot g(x)$ であるとき, $y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ であることを証明せよ.

（ S 級 2 分 40 秒, A 級 4 分, B 級 7 分, C 級 10 分 ）

2. $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ であるとき, $y'=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\{g(x)\}^2}$ であることを証明せよ.

(S 級 3 分 20 秒, A 級 5 分, B 級 9 分, C 級 13 分)

反射テスト　微分　積・商の導関数　証明　01　解答解説

1.　$y = f(x) \cdot g(x)$ であるとき, $y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ であることを証明せよ.
（ S 級 2 分 40 秒, A 級 4 分, B 級 7 分, C 級 10 分 ）

★ 導関数の表記

x の関数 y の導関数を $\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx}}$, $\boldsymbol{y'}$ などと表す.
また, 関数 $f(x)$ があるとき （ この時点でこれは x の関数であることもわかる. ）,
この導関数を $\boldsymbol{f'(x)}$, $\boldsymbol{\dfrac{df(x)}{dx}}$, $\boldsymbol{\dfrac{df}{dx}}$ などと表す.

証明

$$
\begin{aligned}
y' &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \quad \leftarrow ☆ \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\{f(x+h) - f(x)\} \cdot g(x+h)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{f(x) \cdot \{g(x+h) - g(x)\}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} g(x+h) + \lim_{h \to 0} f(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)
\end{aligned}
$$

☆無から有を生む
0 から $+\alpha$ と $-\alpha$ を作るのは, 極限や因数分解などの計算における常套手段.
またこの場合, $-f(x+h) \cdot g(x) + f(x+h) \cdot g(x)$ でも同様に証明できる.

★ 積の導関数の公式（別表記）

u , v , w が x の関数であるとき, $\left\{ \begin{array}{lcl} \boldsymbol{(uv)'} & \boldsymbol{=} & \boldsymbol{u'v + uv'} \\ \boldsymbol{(uvw)'} & = & (uv)'v + uv(w)' = \boldsymbol{u'vw + uv'w + uvw'} \end{array} \right.$

2. $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ であるとき, $y'=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\{g(x)\}^2}$ であることを証明せよ.

(S 級 3 分 20 秒, A 級 5 分, B 級 9 分, C 級 13 分)

証明

$$
\begin{aligned}
y' &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x+h)}+\frac{f(x)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h} \quad \leftarrow☆ \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h\cdot g(x+h)}+\lim_{h\to 0} f(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)}+f(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x)-g(x+h)}{h\cdot g(x+h)\cdot g(x)} \\
&= f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)}+f(x)\cdot\left\{-\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)\cdot g(x)} \\
&= \frac{f'(x)}{g(x)}-f(x)\cdot g'(x)\cdot\frac{1}{\{g(x)\}^2} \\
&= \frac{f'(x)\cdot f(x)}{\{g(x)\}^2}-\frac{f(x)\cdot g'(x)}{\{g(x)\}^2} \\
&= \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\{g(x)\}^2}
\end{aligned}
$$

☆無から有を生む
この場合, $-\frac{f(x+h)}{g(x)}+\frac{f(x+h)}{g(x)}$ でも同様に証明できる.

★ 商の導関数（別表記）

u , v が x の関数であるとき, $\begin{cases} ① & \left(\dfrac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}}\right)' = \dfrac{\boldsymbol{u'v-uv'}}{\boldsymbol{v^2}} \\ ② & \left(\dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{v}}\right)' = -\dfrac{\boldsymbol{v'}}{\boldsymbol{v^2}} \end{cases}$

② は, ① の関数の u を 1 と考えればよい.

$\dfrac{1'v-1v'}{v^2}=\dfrac{-v'}{v^2}$