反射テスト　微分　微分係数の定義　01

1.　次の式を $f(a)$, $f'(a)$ で表せ.（ S 級 2 分, A 級 4 分, B 級 5 分 30 秒, C 級 7 分 ）

(1)　$\displaystyle \lim_{x \to a} \frac{f(a) - f(x)}{x - a}$

(2)　$\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{2h}$

(3)　$\displaystyle \lim_{x \to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$

(4)　$\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)f(a+h) - af(a)}{h}$

2. 次の式を $f(a)$, $f'(a)$ で表せ.（ S 級 2 分, A 級 4 分, B 級 5 分 30 秒, C 級 7 分 ）

(1) $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(2a)-f(2x)}{x-a}$

(2) $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a-h)-f(a)}{h}$

(3) $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{x^2 f(a)-a^2 f(x)}{x-a}$

(4) $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^3 f(a+h)-a^3 f(a)}{h}$

反射テスト　微分　微分係数の定義　01　解答解説

1.　次の式を $f(a)$, $f'(a)$ で表せ.（ S 級 2 分, A 級 4 分, B 級 5 分 30 秒, C 級 7 分 ）

★微分係数の定義

① $\boldsymbol{f'(a) = \lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}$

② $\boldsymbol{f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}}$

(1)　$\displaystyle \lim_{x \to a} \frac{f(a) - f(x)}{x - a}$

$\displaystyle = -\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

$= \boldsymbol{-f'(a)}$　**…答え**

(2)　$\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{2h}$

$\displaystyle = \frac{1}{2} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

$= \boldsymbol{\dfrac{1}{2} f'(a)}$　**…答え**

(3)　$\displaystyle \lim_{x \to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$

$\displaystyle = \lim_{x \to a} \frac{xf(a) - af(a) + af(a) - af(x)}{x - a}$

$\displaystyle = \lim_{x \to a} \left[\frac{(x-a) \cdot f(a)}{x - a} - \frac{a\{f(x) - f(a)\}}{x - a} \right]$

$= \boldsymbol{f(a) - af'(a)}$　**…答え**

☆別解

与式 $\displaystyle = \lim_{x \to a} \frac{xf(a) - xf(x) + xf(x) - af(x)}{x - a}$

としても可能. 重要なことは **変形しようとする意志**.

(4)　$\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)f(a+h) - af(a)}{h}$

$\displaystyle = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \times \{(a+h)f(a+h) - (a+h)f(a)$

$\qquad + (a+h)f(a) - af(a)\}$

$\displaystyle = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)\{f(a+h) - f(a)\} + hf(a)}{h}$

$\displaystyle = \lim_{h \to 0} \left\{ (a+h) \cdot \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right\} + \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h} \cdot f(a)}{\cancel{h}}$

$= \boldsymbol{af'(a) + f(a)}$　**…答え**

☆別解 1　次のような変形でも可能.

$\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)f(a+h) - af(a+h) + af(a+h) - af(a)}{h}$

☆別解 2

$xf(x)$ の $x = a$ での微分係数であるから,

$\dfrac{d}{dx}\{xf(x)\} = f(x) + xf'(x) \quad \Rightarrow \quad f(a) + af'(a)$

この方法はとても早いが, 記述式の問題文で「微分の定義に従って導け」とあれば使えない. ただしその場合でも確かめとして有用だろう.

2. 次の式を $f(a)$，$f'(a)$ で表せ.（S 級 2 分，A 級 4 分，B 級 5 分 30 秒，C 級 7 分）

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(2a)-f(2x)}{x-a}$

$\displaystyle = 2\cdot\lim_{x\to a}\frac{-\{f(2x)-f(2a)\}}{2x-2a}$

$\displaystyle = -2\cdot\lim_{2x\to 2a}\frac{f(2x)-f(2a)}{2x-2a}$

$= \boldsymbol{-2f'(a)}$　**…答え**

☆ $y=2x$，$b=2a$ とするのもよい.

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{h}$

$i=-h$ とおくと，$h\to 0$ ならば $i\to 0$

与式 $\displaystyle = \lim_{i\to 0}\frac{f(a+i)-f(a)}{-i}$

$\displaystyle = -\lim_{i\to 0}\frac{f(a+i)-f(a)}{i}$

$= \boldsymbol{-f'(a)}$　**…答え**

(3) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^2f(a)-a^2f(x)}{x-a}$

$\displaystyle = \lim_{x\to a}\frac{x^2f(a)-a^2f(a)+a^2f(a)-a^2f(x)}{x-a}$

$\displaystyle = \lim_{x\to a}\left[\frac{(x^2-a^2)\cdot f(a)}{x-a}-\frac{a^2\{f(x)-f(a)\}}{x-a}\right]$

$\displaystyle = \lim_{x\to a}\left[(x+a)f(a)-\frac{a^2\{f(x)-f(a)\}}{x-a}\right]$

$= \boldsymbol{2af(a)-a^2f'(a)}$　**…答え**

(4) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^3f(a+h)-a^3f(a)}{h}$

$\displaystyle = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\times\Big[(a+h)^3f(a+h)-(a+h)^3f(a)$
$\displaystyle \qquad +(a+h)^3f(a)-a^3f(a)\Big]$

$\displaystyle = \lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^3\{f(a+h)-f(a)\}}{h}$
$\displaystyle \qquad +\lim_{h\to 0}\frac{(3a^2h+3ah^2+h^3)f(a)}{h}$

$\displaystyle = \lim_{h\to 0}(a+h)^3\cdot\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
$\displaystyle \qquad +\lim_{h\to 0}\frac{(3a^2+3ah+h^3)}{h}\cdot f(a)$

$= \boldsymbol{a^3f'(a)+3a^2f(a)}$　**…答え**

☆確かめ
微分の定義からこの極限は,
$x=a$ のときの，$x^3f(x)$ の微分係数である.
積の微分の公式を用いて,
$\left(x^3f(x)\right)'=\left(x^3\right)'f(x)+x^3f'(x)$
$\qquad =3x^2f(x)+x^3f'(x)$
$x=a$ を代入して，$3a^2f(a)+a^3f'(a)$