反射テスト　ベクトル　不等式　01

1.　次の問に答えよ. ただし, 以下のコーシー・シュワルツの不等式を用いること. また (1) は等号条件もいえ.

（ S 級 4 分, A 級 6 分, B 級 8 分, C 級 11 分 ）

★ **コーシー・シュワルツの不等式** ($Cauchy - Schwarz\ inequality$)

$\left(\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y}\right)^2 \leqq \left|\overrightarrow{x}\right|^2\left|\overrightarrow{y}\right|^2$　　等号条件は, $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ が **1 次従属** のとき.

(1)　$\left|\overrightarrow{a}\right| + \left|\overrightarrow{b}\right|$, $\left|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right|$ の大小関係を言え. 等号条件も付記すること.

(2)　実数 a, b を用いて, $\overrightarrow{x} = (a, b)$ とする. 上のコーシー・シュワルツの不等式を用いて, $4a^2b^2 \leqq (a^2 + b^2)^2$ を証明せよ. 等号条件は言わなくてよい.

2. 次の問に答えよ. ただし, 以下のコーシー・シュワルツの不等式を用いること. また (1) は等号条件もいえ.

(S 級 4 分 20 秒, A 級 6 分 30 秒, B 級 9 分, C 級 12 分)

★ **コーシー・シュワルツの不等式** ($Cauchy - Schwarz\ inequality$)

$\left(\vec{x}\cdot\vec{y}\right)^2 \leqq \left|\vec{x}\right|^2\left|\vec{y}\right|^2$　　等号条件は, $\vec{x}, \vec{y}$ が **1 次従属** のとき.

(1)　$\left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$, $\left|\vec{a} - \vec{b}\right|$ の大小関係を言え. 等号条件も付記すること.

(2)　実数 a, b, c を用いて, $\vec{x} = (a, b, c)$ とする. 上のコーシー・シュワルツの不等式を用いて, 次の不等式を証明せよ. 等号条件は言わなくてよい.

$(ab + bc + ca)^2 \leqq (a^2 + b^2 + c^2)^2$

反射テスト　ベクトル　不等式　01　解答解説

1.　次の問に答えよ．ただし，以下のコーシー・シュワルツの不等式を用いること．また (1) は等号条件もいえ．
（ S 級 4 分，A 級 6 分，B 級 8 分，C 級 11 分 ）

★ コーシー・シュワルツの不等式 ($Cauchy - Schwarz\ inequality$)

$\left(\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y}\right)^2 \leqq \left|\overrightarrow{x}\right|^2\left|\overrightarrow{y}\right|^2$　　等号条件は，$\overrightarrow{x}$，$\overrightarrow{y}$ が **1 次従属** のとき．

☆この不等式は次の形でよく知られている．2 次元, 3 次元空間で成分表示を用いれば，

2 次元：$\overrightarrow{x} = (a_1, a_2)$，$\overrightarrow{y} = (b_1, b_2)$ として　　$\boldsymbol{(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leqq (a_1 + a_2)^2(b_1 + b_2)^2}$

3 次元：$\overrightarrow{x} = (a_1, a_2, a_3)$，$\overrightarrow{y} = (b_1, b_2, b_3)$ として　$\boldsymbol{(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leqq (a_1 + a_2 + a_3)^2(b_1 + b_2 + b_3)^2}$

★ 1 次独立と 1 次従属　線形独立, 線形従属ということもある．

2 次元であれば，　$\overrightarrow{x}$，$\overrightarrow{y}$ が **1 次独立**　$\Leftrightarrow$　$a\overrightarrow{x} + b\overrightarrow{y} = 0$ を満たすのは，$a = b = 0$ のみ．

3 次元であれば，　$\overrightarrow{x}$，$\overrightarrow{y}$，$\overrightarrow{z}$ が **1 次独立**　$\Leftrightarrow$　$a\overrightarrow{x} + b\overrightarrow{y} + c\overrightarrow{z} = 0$ を満たすのは，$a = b = c = 0$ のみ．

n 次元に拡張すれば，　$\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \cdots, \overrightarrow{x_n}$ が **1 次独立**　$\Leftrightarrow$　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k\overrightarrow{x_k} = 0$ を満たすのは，$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ のみ．

1 次従属 は 1 次独立ではないときをさす．2 次元であれば 2 つのベクトルが平行なとき，3 次元であれば 3 つのベクトルが同じ平面にあるときなどが 1 次従属の典型例である．またいずれかのベクトルが $\overrightarrow{0}$ のときも 1 次従属と考える．

(1)　$\left|\overrightarrow{a}\right| + \left|\overrightarrow{b}\right|$，$\left|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right|$ の大小関係を言え．等号条件も付記すること．

ともに 0 以上であるから，平方差を比べる．

$$\begin{aligned}
&\left(\left|\overrightarrow{a}\right| + \left|\overrightarrow{b}\right|\right)^2 - \left|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right|^2 \\
&= \left(\left|\overrightarrow{a}\right|^2 + 2\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right| + \left|\overrightarrow{b}\right|^2\right) - \left(\left|\overrightarrow{a}\right|^2 + 2\,\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} + \left|\overrightarrow{b}\right|^2\right) \\
&= 2\left(\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right| - \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right) \quad \cdots ①
\end{aligned}$$

★ コーシー・シュワルツの不等式 から，

$$\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)^2 \leqq \left|\overrightarrow{a}\right|^2\left|\overrightarrow{b}\right|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right| \leqq \left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right| \quad \Leftrightarrow \quad -\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right| \leqq \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} \leqq \left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right| \quad \Rightarrow \quad \left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right| - \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} \geqq 0$$

よって，①は 0 以上であるから，$\left|\overrightarrow{a}\right| + \left|\overrightarrow{b}\right| \geqq \left|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right|$

等号条件は $\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right| = \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ のとき．

等号条件の別表現は，$\overrightarrow{a}$ または $\overrightarrow{b}$ が $\overrightarrow{0}$，もしくは $\overrightarrow{b} = c\overrightarrow{a}$ (c は正の実数)

（ ☆「$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ が 1 次従属のとき.」では不十分．）

☆ベクトルの **三角不等式** の証明である．

★ 三角不等式 ($triangle\ inequality$)　　$||x + y|| \leqq ||x|| + ||y||$

二重の絶対値の記号は一般的に **ノルム** とよばれ，大きさ・長さを抽象化したもの．

ノルムは，x, y が実数・複素数なら絶対値，ベクトルなら長さである．

(2)　実数 a, b を用いて，$\overrightarrow{x} = (a, b)$ とする．上のコーシー・シュワルツの不等式を用いて，$4a^2b^2 \leqq (a^2 + b^2)^2$ を証明せよ．等号条件は言わなくてよい．

$\overrightarrow{y} = (b, a)$ とおくと，**★ コーシー・シュワルツの不等式** から，

$$\begin{aligned}
&\left(\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y}\right)^2 \leqq \left|\overrightarrow{x}\right|^2\left|\overrightarrow{y}\right|^2 \\
\Rightarrow\ &\{(a, b)\cdot(b, a)\}^2 \leqq |(a, b)|^2|(b, a)|^2 \\
\Leftrightarrow\ &(ab + ba)^2 \leqq (a^2 + b^2)(b^2 + a^2) \\
\Leftrightarrow\ &4a^2b^2 \leqq (a^2 + b^2)^2
\end{aligned}$$

2. 次の問に答えよ．ただし，以下のコーシー・シュワルツの不等式を用いること．また (1) は等号条件もいえ．

（ S 級 4 分 20 秒，A 級 6 分 30 秒，B 級 9 分，C 級 12 分 ）

★ **コーシー・シュワルツの不等式** (*Cauchy − Schwarz inequality*)

$\left(\vec{x}\cdot\vec{y}\right)^2 \leqq \left|\vec{x}\right|^2\left|\vec{y}\right|^2$　　等号条件は，$\vec{x}$，$\vec{y}$ が **1 次従属** のとき．

☆この不等式は次の形でよく知られている．2 次元，3 次元空間で成分表示を用いれば，

2 次元：　$\vec{x}=(a_1,a_2)$，$\vec{y}=(b_1,b_2)$ として　　$\boldsymbol{(a_1b_1+a_2b_2)^2 \leqq (a_1+a_2)^2(b_1+b_2)^2}$

3 次元：　$\vec{x}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{y}=(b_1,b_2,b_3)$ として　$\boldsymbol{(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \leqq (a_1+a_2+a_3)^2(b_1+b_2+b_3)^2}$

★ **1 次独立と 1 次従属**　線形独立，線形従属ということもある．

2 次元であれば，　$\vec{x}$，$\vec{y}$ が **1 次独立**　$\Leftrightarrow$　$a\vec{x}+b\vec{y}=0$ を満たすのは，$a=b=0$ のみ．

3 次元であれば，　$\vec{x}$，$\vec{y}$，$\vec{z}$ が **1 次独立**　$\Leftrightarrow$　$a\vec{x}+b\vec{y}+c\vec{z}=0$ を満たすのは，$a=b=c=0$ のみ．

n 次元に拡張すれば，　$\vec{x_1},\vec{x_2},\cdots,\vec{x_n}$ が **1 次独立**　$\Leftrightarrow$　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k\vec{x_k}=0$ を満たすのは，$c_1=c_2=\cdots=c_n=0$ のみ．

1 次従属 は 1 次独立ではないときをさす．2 次元であれば 2 つのベクトルが平行なとき，3 次元であれば 3 つのベクトルが同じ平面にあるときなどが 1 次従属の典型例である．またいずれかのベクトルが $\vec{0}$ のときも 1 次従属と考える．

(1)　$\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$，$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$ の大小関係を言え．等号条件も付記すること．

ともに 0 以上であるから，平方差を比べる．

$$\left(\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|\right)^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2$$
$$=\left(\left|\vec{a}\right|^2+2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|+\left|\vec{b}\right|^2\right)-\left(\left|\vec{a}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2\right)$$
$$=2\left(\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|+\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\quad\cdots①$$

★ **コーシー・シュワルツの不等式** から，

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2 \leqq \left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2 \quad\Leftrightarrow\quad \left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right| \leqq \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \quad\Leftrightarrow\quad -\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \leqq \vec{a}\cdot\vec{b} \leqq \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \quad\Rightarrow\quad \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|+\vec{a}\cdot\vec{b} \geqq 0$$

よって，①は 0 以上であるから，$\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right| \geqq \left|\vec{a}-\vec{b}\right|$

等号条件は $\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|+\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ のとき．

等号条件の別表現は，$\vec{a}$ または $\vec{b}$ が $\vec{0}$，もしくは $\vec{b}=c\vec{a}$ (c は負の実数)

(☆「$\vec{a}$，$\vec{b}$ が 1 次従属のとき.」では不十分.)

☆ **三角不等式** の証明・応用である．

★ **三角不等式** $\left|\vec{x}\right|+\left|\vec{y}\right| \geqq \left|\vec{x}+\vec{y}\right|$ において，

$\vec{x}=\vec{a}$，$\vec{y}=-\vec{b}$ を代入すると，　$\left|\vec{a}\right|+\left|-\vec{b}\right| \geqq \left|\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)\right| \quad\Leftrightarrow\quad \left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right| \geqq \left|\vec{a}-\vec{b}\right|$

(2)　実数 a,b,c を用いて，$\vec{x}=(a,b,c)$ とする．上のコーシー・シュワルツの不等式を用いて，次の不等式を証明せよ．等号条件は言わなくてよい．

$$(ab+bc+ca)^2 \leqq (a^2+b^2+c^2)^2$$

$\vec{y}=(b,c,a)$ とおくと，★ **コーシー・シュワルツの不等式** から，

$$\left(\vec{x}\cdot\vec{y}\right)^2 \leqq \left|\vec{x}\right|^2\left|\vec{y}\right|^2$$
$$\Rightarrow\quad \{(a,b,c)\cdot(b,c,a)\}^2 \leqq |(a,b,c)|^2|(b,c,a)|^2$$
$$\Leftrightarrow\quad (ab+bc+ca)^2 \leqq (a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+a^2)$$
$$\Leftrightarrow\quad (ab+bc+ca)^2 \leqq (a^2+b^2+c^2)^2$$