反射テスト　ベクトル　空間　ベクトル方程式　01

1.　次のベクトル方程式が表す図形を例にならって示せ．どの問においても空間上の定点 A, B, C, 動点 P の位置ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{p}$ のように表す．ただし原点は O とし，その位置ベクトルは $\overrightarrow{0}$ とする．

（ S 級 1 分 30 秒，A 級 2 分 30 秒，B 級 4 分，C 級 6 分 ）

例 1　あらゆる実数 t に対して，$\overrightarrow{p} = (1-t)\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}$　⇔　**点 P は直線 AB 上にある．**

例 2　正の実定数 r に対して，$\left|\overrightarrow{p}\right| = r$　⇔　**点 P は中心 O，半径 r の球面上にある．**

(1)　あらゆる実数 t に対して，
$\overrightarrow{p} = (1+t)\overrightarrow{b} - t\overrightarrow{c}$

(2)　正の実定数 r に対して，
$\left|\overrightarrow{p} - \overrightarrow{a}\right| = r$

(3)　あらゆる実数 s, t に対して，
$\overrightarrow{p} = s\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b} + (1-s-t)\overrightarrow{c}$

(4)　$\left|\overrightarrow{p} - \overrightarrow{a}\right| = \left|\overrightarrow{p} - \overrightarrow{b}\right|$

2.　次のベクトル方程式が表す図形を例にならって示せ．どの問においても空間上の定点 A, B, C, 動点 P の位置ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{p}$ のように表す．ただし原点は O とし，その位置ベクトルは $\overrightarrow{0}$ とする．

（ S 級 1 分 30 秒，A 級 2 分 30 秒，B 級 4 分，C 級 6 分 ）

例 1　あらゆる実数 t に対して，$\overrightarrow{p} = (1-t)\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}$　⇔　**点 P は直線 AB 上にある．**

例 2　正の実定数 r に対して，$\left|\overrightarrow{p}\right| = r$　⇔　**点 P は中心 O，半径 r の球面上にある．**

(1)　あらゆる実数 t に対して，
$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{b} + t\left(\overrightarrow{c} - \overrightarrow{b}\right)$

(2)　正の実定数 r に対して，
$\left|\overrightarrow{p} - \dfrac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}}{2}\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right|}{2}$

(3)　あらゆる実数 s, t に対して，
$\overrightarrow{p} = s\overrightarrow{b} + t\overrightarrow{c}$

(4)　$\left|\overrightarrow{p}\right| = \left|\overrightarrow{p} - \overrightarrow{a}\right|$

反射テスト　ベクトル　空間　ベクトル方程式　01　解答解説

1.　次のベクトル方程式が表す図形を例にならって示せ．どの問においても空間上の定点 A, B, C, 動点 P の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{p}$ のように表す．ただし原点は O とし，その位置ベクトルは $\vec{0}$ とする．

（ S 級 1 分 30 秒，A 級 2 分 30 秒，B 級 4 分，C 級 6 分 ）

例 1　あらゆる実数 t に対して，$\vec{p} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$　⇔　**点 P は直線 AB 上にある．**

例 2　正の実定数 r に対して，$\left|\vec{p}\right| = r$　⇔　**点 P は中心 O，半径 r の球面上にある．**

(1)　あらゆる実数 t に対して，
$\vec{p} = (1+t)\vec{b} - t\vec{c}$

$t = -s$ とおくと，与えられたベクトル方程式は，
実数 s に対して，$\vec{p} = (1-s)\vec{b} + s\vec{c}$

∴　**点 P は直線 BC 上にある．　…答え**

(2)　正の実定数 r に対して，
$\left|\vec{p} - \vec{a}\right| = r$

∴　**点 P は中心 A，半径 r の球面上にある．　…答え**

☆ベクトル方程式の意味は「線分 AP の距離が r 」．
∴定点 A までの距離が一定（ 距離 r ）の点の集合．

(3)　あらゆる実数 s, t に対して，
$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} + (1-s-t)\vec{c}$

係数の和が 1 であるから，

∴　**点 P は平面 ABC 上にある．　…答え**

★重要公式
$s+t+u=1$ を満たす実数 s, t, u に対して，
点 P は平面 ABC 上にある．
⇔　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} + u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

(4)　$\left|\vec{p} - \vec{a}\right| = \left|\vec{p} - \vec{b}\right|$

∴　**点 P は線分 AB に垂直で，
線分 AB の中点を通る平面上にある．　…答え**

別解　**点 P は線分 AB の垂直二等分面上にある．**

★線分の垂直二等分面
線分の端点から等距離にある空間上の点の集合．
線分の中点を通り，この線分に垂直な平面になる．

☆平面ベクトルの場合，このベクトル方程式は線分 AB の垂直二等分線を表した．空間への拡張を考えよう．

2. 次のベクトル方程式が表す図形を例にならって示せ．どの問においても空間上の定点 A, B, C, 動点 P の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{p}$ のように表す．ただし原点は O とし，その位置ベクトルは $\vec{0}$ とする．

(S 級 1 分 30 秒, A 級 2 分 30 秒, B 級 4 分, C 級 6 分)

例 1　あらゆる実数 t に対して, $\vec{p} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$　⇔　**点 P は直線 AB 上にある.**

例 2　正の実定数 r に対して, $\left|\vec{p}\right| = r$　⇔　**点 P は中心 O, 半径 r の球面上にある.**

(1)　あらゆる実数 t に対して,

$\vec{p} = \vec{b} + t\left(\vec{c} - \vec{b}\right)$

$$\vec{p} = \vec{b} + t\left(\vec{c} - \vec{b}\right)$$
$$= (1-t)\vec{b} + t\vec{c}$$

∴　**点 P は直線 BC 上にある.**　**…答え**

☆最初の式の解釈

$\vec{p} = \vec{b} + t\left(\vec{c} - \vec{b}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

この形からも直線 BC とわかる.

(2)　正の実定数 r に対して,

$$\left|\vec{p} - \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}\right| = \frac{\left|\vec{a} - \vec{b}\right|}{2}$$

球のベクトル方程式である.

中心の位置ベクトルは $\dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$

⇒　中心は線分 AB の中点

半径は $\dfrac{\left|\vec{a} - \vec{b}\right|}{2}$

⇒　半径は線分 AB の半分

∴ **点 P は線分 AB を直径とする球面上にある.**　**…答え**

(3)　あらゆる実数 s , t に対して,

$\vec{p} = s\vec{b} + t\vec{c}$

$\vec{p} = (1-s-t)\vec{0} + s\vec{b} + t\vec{c}$

と考えることができるので,

∴　**点 P は平面 OBC 上にある.**　**…答え**

☆

与式を書き換えれば,

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

自由変数 s , t によって上記のように表されるので,

点 P は, 面 OBC 上の任意の点を表さすことができるということ.

(4)　$\left|\vec{p}\right| = \left|\vec{p} - \vec{a}\right|$

⇔　$\left|\vec{p} - \vec{0}\right| = \left|\vec{p} - \vec{b}\right|$

∴　**点 P は線分 OA に垂直で,**
線分 OA の中点を通る平面上にある.　**…答え**

別解　**点 P は線分 OA の垂直二等分面上にある.**