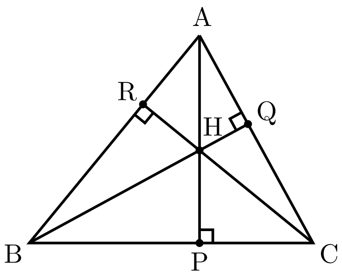
反射テスト　ベクトル　三角形　五心の位置ベクトル　03　難

1.　点 A, B, C の位置ベクトルを $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$, $\overrightarrow{\gamma}$ とする．下図を用いて，次の問に答えよ．ただし，$\tan \mathrm{A}$ は △ABC の内角 A の正接を表し，△ABC は直角三角形ではないとする．（ S 級 10 分，A 級 15 分，B 級 22 分，C 級 30 分 ）



(1)　左図において，$\mathrm{BP} : \mathrm{CP} = \tan \mathrm{C} : \tan \mathrm{B}$ を示せ．

(2)　左図において，$\mathrm{AH} : \mathrm{HP} = (\tan \mathrm{B} + \tan \mathrm{C}) : \tan \mathrm{A}$ を示せ．

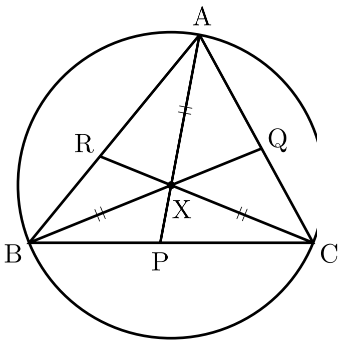
(3)　点 H の位置ベクトルを $\overrightarrow{h}$ とするとき，次の式を示せ．

$$\overrightarrow{h} = \frac{(\tan \mathrm{A})\overrightarrow{\alpha} + (\tan \mathrm{B})\overrightarrow{\beta} + (\tan \mathrm{C})\overrightarrow{\gamma}}{\tan \mathrm{A} + \tan \mathrm{B} + \tan \mathrm{C}}$$

(4)　$\overrightarrow{\alpha} = (-1, 0)$，$\overrightarrow{\beta} = (1, 0)$，$\overrightarrow{\gamma} = (2, \sqrt{3})$ とする．
(3) を用いて $\overrightarrow{h}$ の成分表示を求めよ．
ちなみに (3) は鈍角三角形でも成り立つ．（ ∵負の内分比は外分比を表す． ）

2. 点 A, B, C の位置ベクトルを $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$, $\overrightarrow{\gamma}$ とする. 下図を用いて, 次の問に答えよ. ただし, sin A は △ABC の内角 A の正弦を表す.

（ S 級 10 分, A 級 15 分, B 級 22 分, C 級 30 分 ）



(1) 左図において, $\mathrm{BP} : \mathrm{CP} = \sin 2\mathrm{C} : \sin 2\mathrm{B}$ を示せ.

(2) 左図において, $\mathrm{AX} : \mathrm{XP} = (\sin 2\mathrm{B} + \sin 2\mathrm{C}) : \sin 2\mathrm{A}$ を示せ.

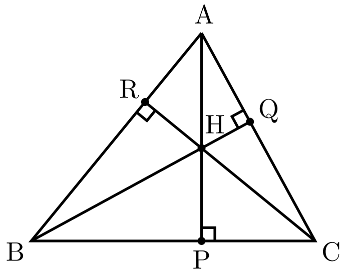
(3) 点 X の位置ベクトルを $\overrightarrow{x}$ とするとき, 次の式を示せ.

$$\overrightarrow{x} = \frac{(\sin 2A)\overrightarrow{\alpha} + (\sin 2\mathrm{B})\overrightarrow{\beta} + (\sin 2\mathrm{C})\overrightarrow{\gamma}}{\sin 2\mathrm{A} + \sin 2\mathrm{B} + \sin 2\mathrm{C}}$$

(4) $\overrightarrow{\alpha} = (0, \sqrt{3})$, $\overrightarrow{\beta} = (-1, 0)$, $\overrightarrow{\gamma} = (\sqrt{3}, 0)$ とする.
(3) を用いて $\overrightarrow{x}$ の成分表示を求めよ.

反射テスト　ベクトル　三角形　五心の位置ベクトル　03　難　解答解説

1. 点 A, B, C の位置ベクトルを $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$, $\overrightarrow{\gamma}$ とする．下図を用いて，次の問に答えよ．ただし，$\tan \mathrm{A}$ は △ABC の内角 A の正接を表し，△ABC は直角三角形ではないとする．（ S 級 10 分，A 級 15 分，B 級 22 分，C 級 30 分 ）



(1) 左図において， $\mathrm{BP} : \mathrm{CP} = \tan \mathrm{C} : \tan \mathrm{B}$ を示せ．

(2) 左図において， $\mathrm{AH} : \mathrm{HP} = (\tan \mathrm{B} + \tan \mathrm{C}) : \tan \mathrm{A}$ を示せ．

(3) 点 H の位置ベクトルを $\overrightarrow{h}$ とするとき，次の式を示せ．

$$\overrightarrow{h} = \frac{(\tan \mathrm{A})\overrightarrow{\alpha} + (\tan \mathrm{B})\overrightarrow{\beta} + (\tan \mathrm{C})\overrightarrow{\gamma}}{\tan \mathrm{A} + \tan \mathrm{B} + \tan \mathrm{C}}$$

(4) $\overrightarrow{\alpha} = (-1, 0)$, $\overrightarrow{\beta} = (1, 0)$, $\overrightarrow{\gamma} = (2, \sqrt{3})$ とする．
(3) を用いて $\overrightarrow{h}$ の成分表示を求めよ．
ちなみに (3) は鈍角三角形でも成り立つ．(∵負の内分比は外分比を表す．)

★ 垂心の位置ベクトル

△ABC の垂心の位置ベクトルを $\overrightarrow{h}$ とすると，
$$\boldsymbol{\overrightarrow{h} = \frac{(\tan \mathrm{A})\overrightarrow{\alpha} + (\tan \mathrm{B})\overrightarrow{\beta} + (\tan \mathrm{C})\overrightarrow{\gamma}}{\tan \mathrm{A} + \tan \mathrm{B} + \tan \mathrm{C}}}$$

(1)
$\mathrm{AH} = \mathrm{BP} \tan \mathrm{B} = \mathrm{CP} \tan \mathrm{C}$ であるから，
$\mathrm{BP} : \mathrm{CP} = \tan \mathrm{C} : \tan \mathrm{B}$

(2)
(1) から同様にして，$\mathrm{CQ} : \mathrm{QA} = \tan \mathrm{A} : \tan \mathrm{C}$

メネラウスの定理から，

$$\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QC}} \times \frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{BP}} \times \frac{\mathrm{PH}}{\mathrm{HA}} = 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{\tan \mathrm{C}}{\tan \mathrm{A}} \times \frac{\tan \mathrm{B} + \tan \mathrm{C}}{\tan \mathrm{C}} \times \frac{\mathrm{PH}}{\mathrm{HA}} = 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{HP}} = \frac{\tan \mathrm{B} + \tan \mathrm{C}}{\tan \mathrm{A}}$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{AH} : \mathrm{HP} = (\tan \mathrm{B} + \tan \mathrm{C}) : \tan \mathrm{A}$$

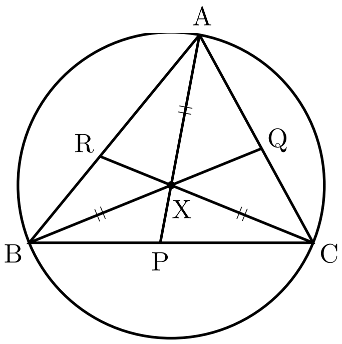
(3)
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{BC}}\overrightarrow{\beta} + \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{BC}}\overrightarrow{\gamma}$$
$$= \frac{\tan \mathrm{B}}{\tan \mathrm{B} + \tan \mathrm{C}}\overrightarrow{\beta} + \frac{\tan \mathrm{C}}{\tan \mathrm{B} + \tan \mathrm{C}}\overrightarrow{\gamma}$$
$$\therefore \quad \overrightarrow{h} = \frac{\mathrm{HP}}{\mathrm{AP}}\overrightarrow{\alpha} + \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AP}}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$
$$= \frac{\tan \mathrm{A}}{\tan \mathrm{A} + \tan \mathrm{B} + \tan \mathrm{C}}\overrightarrow{\alpha} + \frac{\tan \mathrm{B} + \tan \mathrm{C}}{\tan \mathrm{A} + \tan \mathrm{B} + \tan \mathrm{C}}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$
$$= \frac{(\tan \mathrm{A})\overrightarrow{\alpha} + (\tan \mathrm{B})\overrightarrow{\beta} + (\tan \mathrm{C})\overrightarrow{\gamma}}{\tan \mathrm{A} + \tan \mathrm{B} + \tan \mathrm{C}}$$

(4)
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (1, 0) - (-1, 0) = (2, 0)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (2, \sqrt{3}) - (-1, 0) = (3, \sqrt{3})$$
$$\cos A = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|} = \frac{2 \times 3 + 0 \times \sqrt{3}}{\sqrt{2^2 + 0^2} \times \sqrt{3^2 + \sqrt{3}^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = (2, \sqrt{3}) - (1, 0) = (1, \sqrt{3})$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = (-1, 0) - (1, 0) = (-2, 0)$$
$$\cos \mathrm{B} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{BC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BA}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|} = \frac{1 \times (-2) + \sqrt{3} \times 0}{\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} \times \sqrt{(-2)^2 + 0^2}} = -\frac{1}{2}$$

以上の結果から， $\mathrm{A} = 30^\circ$, $\mathrm{B} = 120^\circ$, $\mathrm{C} = 30^\circ$

$$\Rightarrow \quad \tan \mathrm{A} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \ \tan \mathrm{B} = -\sqrt{3}, \ \tan \mathrm{C} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\therefore \quad \tan \mathrm{A} + \tan \mathrm{B} + \tan \mathrm{C} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\tan \mathrm{A}}{\tan \mathrm{A} + \tan \mathrm{B} + \tan \mathrm{C}} = -1 \\ \dfrac{\tan \mathrm{B}}{\tan \mathrm{A} + \tan \mathrm{B} + \tan \mathrm{C}} = 3 \\ \dfrac{\tan \mathrm{C}}{\tan \mathrm{A} + \tan \mathrm{B} + \tan \mathrm{C}} = -1 \end{cases}$$
$$\therefore \quad \overrightarrow{h} = \frac{(\tan \mathrm{A})\overrightarrow{\alpha} + (\tan \mathrm{B})\overrightarrow{\beta} + (\tan \mathrm{C})\overrightarrow{\gamma}}{\tan \mathrm{A} + \tan \mathrm{B} + \tan \mathrm{C}}$$
$$= -(-1, 0) + 3(1, 0) - (2, \sqrt{3})$$
$$= \boldsymbol{\left(2, -\sqrt{3}\right)} \quad \textbf{…答え}$$

2. 点 A, B, C の位置ベクトルを $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ とする. 下図を用いて, 次の問に答えよ. ただし, sin A は △ABC の内角 A の正弦を表す. (S 級 10 分, A 級 15 分, B 級 22 分, C 級 30 分)



(1) 左図において, $\mathrm{BP} : \mathrm{CP} = \sin 2\mathrm{C} : \sin 2\mathrm{B}$ を示せ.

(2) 左図において, $\mathrm{AX} : \mathrm{XP} = (\sin 2\mathrm{B} + \sin 2\mathrm{C}) : \sin 2\mathrm{A}$ を示せ.

(3) 点 X の位置ベクトルを $\vec{x}$ とするとき, 次の式を示せ.

$$\vec{x} = \frac{(\sin 2\mathrm{A})\,\vec{\alpha} + (\sin 2\mathrm{B})\,\vec{\beta} + (\sin 2\mathrm{C})\,\vec{\gamma}}{\sin 2\mathrm{A} + \sin 2\mathrm{B} + \sin 2\mathrm{C}}$$

(4) $\vec{\alpha} = (0, \sqrt{3})$, $\vec{\beta} = (-1, 0)$, $\vec{\gamma} = (\sqrt{3}, 0)$ とする. (3) を用いて $\vec{x}$ の成分表示を求めよ.

★ 外心の位置ベクトル

△ABC の外心の位置ベクトルを $\vec{x}$ とすると, $\displaystyle \boldsymbol{\vec{x} = \frac{(\sin 2\mathrm{A})\,\vec{\alpha} + (\sin 2\mathrm{B})\,\vec{\beta} + (\sin 2\mathrm{C})\,\vec{\gamma}}{\sin 2\mathrm{A} + \sin 2\mathrm{B} + \sin 2\mathrm{C}}}$

(1)

$$\begin{aligned}\mathrm{BP} : \mathrm{CP} &= \triangle\mathrm{ABX} : \triangle\mathrm{ACX}\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{BX}\sin(\angle\mathrm{AXB}) : \frac{1}{2}\mathrm{CX}\sin(\angle\mathrm{AXC})\\ &= \sin(\angle\mathrm{AXB}) : \sin(\angle\mathrm{CXA})\\ &= \sin 2\mathrm{C} : \sin 2\mathrm{B} \qquad (\because \text{円周角の定理})\end{aligned}$$

(2)

(1) から同様にして, $\mathrm{CQ} : \mathrm{QA} = \sin 2\mathrm{A} : \sin 2\mathrm{C}$

メネラウスの定理から,

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QC}} \times \frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{BP}} \times \frac{\mathrm{PX}}{\mathrm{XA}} = 1\\ \Leftrightarrow\ &\frac{\sin 2\mathrm{C}}{\sin 2\mathrm{A}} \times \frac{\sin 2\mathrm{B} + \sin 2\mathrm{C}}{\sin 2\mathrm{C}} \times \frac{\mathrm{PX}}{\mathrm{XA}} = 1\\ \Leftrightarrow\ &\frac{\mathrm{AX}}{\mathrm{XP}} = \frac{\sin 2\mathrm{B} + \sin 2\mathrm{C}}{\sin 2\mathrm{A}}\\ \Leftrightarrow\ &\mathrm{AX} : \mathrm{XP} = (\sin 2\mathrm{B} + \sin 2\mathrm{C}) : \sin 2\mathrm{A}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{BC}}\vec{\beta} + \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{BC}}\vec{\gamma}\\ &= \frac{\sin 2\mathrm{B}}{\sin 2\mathrm{B} + \sin 2\mathrm{C}}\vec{\beta} + \frac{\sin 2\mathrm{C}}{\sin 2\mathrm{B} + \sin 2\mathrm{C}}\vec{\gamma}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \vec{x} &= \frac{\mathrm{XP}}{\mathrm{AX}}\vec{\alpha} + \frac{\mathrm{AX}}{\mathrm{AP}}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\ &= \frac{\sin 2\mathrm{A}}{\sin 2\mathrm{A} + \sin 2\mathrm{B} + \sin 2\mathrm{C}}\vec{\alpha} + \frac{\sin 2\mathrm{B} + \sin 2\mathrm{C}}{\sin 2\mathrm{A} + \sin 2\mathrm{B} + \sin 2\mathrm{C}}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\ &= \frac{(\sin 2\mathrm{A})\,\vec{\alpha} + (\sin 2\mathrm{B})\,\vec{\beta} + (\sin 2\mathrm{C})\,\vec{\gamma}}{\sin 2\mathrm{A} + \sin 2\mathrm{B} + \sin 2\mathrm{C}}\end{aligned}$$

(4)

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = (0, \sqrt{3}) - (-1, 0) = (1, \sqrt{3})$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = (\sqrt{3}, 0) - (-1, 0) = (\sqrt{3} + 1, 0)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ \cos\mathrm{B} &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BA}}||\overrightarrow{\mathrm{BC}}|}\\ &= \frac{1 \times (\sqrt{3} + 1) + \sqrt{3} \times 1}{\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} \times \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2 + 0^2}} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = (\sqrt{3}, 0) - (0, \sqrt{3}) = (\sqrt{3}, -\sqrt{3})$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CB}} = (\sqrt{3}, 0) - (-1, 0) = (\sqrt{3} + 1, 0)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ \cos\mathrm{C} &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CA}}||\overrightarrow{\mathrm{CB}}|}\\ &= \frac{\sqrt{3} \times (\sqrt{3} + 1) + (-\sqrt{3}) \times 0}{\sqrt{\sqrt{3}^2 + (-\sqrt{3})^2} \times \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

以上の結果から, $\mathrm{A} = 75^\circ$, $\mathrm{B} = 60^\circ$, $\mathrm{C} = 45^\circ$

$$\Rightarrow\ \sin 2\mathrm{A} = \frac{1}{2},\ \sin 2\mathrm{B} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin 2\mathrm{C} = 1$$

$$\therefore\ \sin 2\mathrm{A} + \sin 2\mathrm{B} + \sin 2\mathrm{C} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\sin 2\mathrm{A}}{\sin 2\mathrm{A} + \sin 2\mathrm{B} + \sin 2\mathrm{C}} = \dfrac{1}{3 + \sqrt{3}}\\ \dfrac{\sin 2\mathrm{B}}{\sin 2\mathrm{A} + \sin 2\mathrm{B} + \sin 2\mathrm{C}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}\\ \dfrac{\sin 2\mathrm{C}}{\sin 2\mathrm{A} + \sin 2\mathrm{B} + \sin 2C} = \dfrac{2}{3 + \sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \vec{x} &= \frac{(\sin 2\mathrm{A})\,\vec{\alpha} + (\sin 2\mathrm{B})\,\vec{\beta} + (\sin 2\mathrm{C})\,\vec{\gamma}}{\sin 2\mathrm{A} + \sin 2\mathrm{B} + \sin 2\mathrm{C}}\\ &= \frac{(0, \sqrt{3}) + \sqrt{3}(-1, 0) + 2(\sqrt{3}, 0)}{3 + \sqrt{3}}\\ &= \boldsymbol{\left(\frac{\sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}\right)} \quad \textbf{…答え}\\ &= \boldsymbol{\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}, \frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right)} \quad \textbf{…答え}\end{aligned}$$