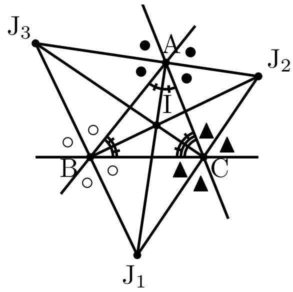
反射テスト　ベクトル　三角形　五心の位置ベクトル　02

1.　点 A, B, C の位置ベクトルを $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ とする．また BC $= a$, CA $= b$, AB $= c$ とする．下図を用いて，次の問に答えよ．

（ S 級 5 分，A 級 9 分，B 級 14 分，C 級 20 分 ）



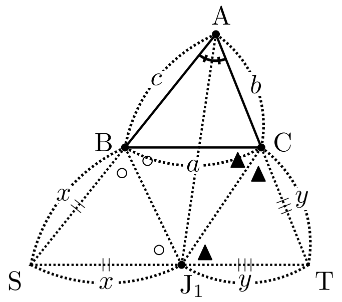
(1)　点 $\mathrm{J_1}$ の位置ベクトルを $\vec{j_1}$ とするとき，次の式が成立することを証明したい．

$$\vec{j_1} = \frac{-a\vec{\alpha}+b\vec{\beta}+c\vec{\gamma}}{-a+b+c}$$

以下の $\boxed{}$ をうめよ．

(2)　$\vec{\alpha} = (0, 12)$, $\vec{\beta} = (-5, 0)$, $\vec{\gamma} = (9, 0)$ とする．

$\vec{j_1}$ の成分表示を求めよ．



(1)

$\mathrm{J_1}$ を通り辺 BC と平行な直線と AB, AC との延長線との交点を

それぞれ左図のように S, T とする．

錯角が等しいので，　$\angle \mathrm{BJ_1S} = \angle \mathrm{J_1BC}$ かつ $\angle \mathrm{CJ_1T} = \angle \mathrm{J_1CB}$

ゆえに $\triangle \mathrm{SJ_1B}$ と $\triangle \mathrm{TJ_1C}$ は二等辺三角形となり，　$\mathrm{SB} = \mathrm{SJ_1}$ かつ $\mathrm{TC} = \mathrm{TJ_1}$

$\mathrm{SB} = \mathrm{SJ_1} = x$, $\mathrm{TC} = \mathrm{TJ_1} = y$ とおくと，　$\mathrm{ST} = \mathrm{SJ_1} + \mathrm{TJ_1} = x + y$

原点を O とする．

BC // ST だから，　$c : x = b : \boxed{}$　$\cdots$①

BC // ST だから，$\triangle \mathrm{ABC} \backsim \triangle\boxed{}$

$\Rightarrow$　BC : ST = AB : AS

$\Rightarrow$　$a : (x+y) = c : (\boxed{})$　$\cdots$②

①, ② を x , y について解くと，

$$x = \frac{\boxed{}}{b+c-a} \text{ かつ } y = \frac{\boxed{}}{b+c-a}$$

以上から，

$$\overrightarrow{\mathrm{AS}} = \frac{x+y}{\boxed{}}\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \frac{\boxed{}}{b+c-a}(\vec{\beta}-\vec{\alpha})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AT}} = \frac{x+y}{\boxed{}}\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \frac{\boxed{}}{b+c-a}(\vec{\gamma}-\vec{\alpha})$$

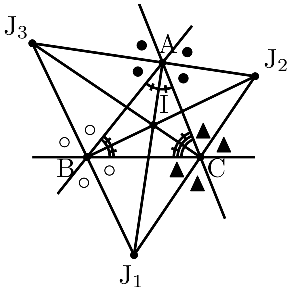
線分 $\mathrm{AJ_1}$ は∠A の二等分線であるから，

$\mathrm{J_1}$ は ST を $x : y = c : b$ に内分するので，

$$\begin{aligned}\vec{j_1} &= \overrightarrow{\mathrm{OJ_1}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AJ_1}} \\ &= \vec{\alpha} + \frac{b}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AS}} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AT}} \\ &= \vec{\alpha} + \frac{\boxed{}}{b+c-a}(\vec{\beta}-\vec{\alpha}) + \frac{\boxed{}}{b+c-a}(\vec{\gamma}-\vec{\alpha}) \\ &= \frac{-a}{b+c-a}\vec{\alpha} + \frac{b}{b+c-a}\vec{\beta} + \frac{c}{b+c-a}\vec{\gamma}\end{aligned}$$

2. 点 A, B, C の位置ベクトルを $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$, $\overrightarrow{\gamma}$ とする. また BC $= a$, CA $= b$, AB $= c$ とする. 下図を用いて, 次の問に答えよ.

(S 級 12 分, A 級 16 分, B 級 22 分, C 級 30 分)



(1) 点 J_2 の位置ベクトルを $\overrightarrow{j_2}$ とするとき, 次の式を示せ.

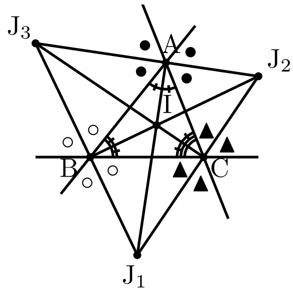
$$\overrightarrow{j_2} = \frac{a\overrightarrow{\alpha} - b\overrightarrow{\beta} + c\overrightarrow{\gamma}}{a - b + c}$$

(2) xy 平面上で A$(0, 0)$, B$(8, 0)$, C$(0, 6)$ とするとき,

△ABC の 3 つの傍心の座標を全て求めよ.

反射テスト　ベクトル　三角形　五心の位置ベクトル　02　解答解説

1.　点 A, B, C の位置ベクトルを $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ とする．また $\mathrm{BC}=a$, $\mathrm{CA}=b$, $\mathrm{AB}=c$ とする．下図を用いて，次の問に答えよ．
（S 級 5 分，A 級 9 分，B 級 14 分，C 級 20 分）

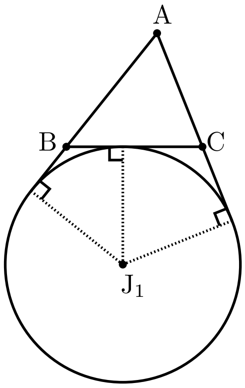


(1)　点 $\mathrm{J_1}$ の位置ベクトルを $\vec{j_1}$ とするとき，次の式が成立することを証明したい．

$$\vec{j_1}=\frac{-a\vec{\alpha}+b\vec{\beta}+c\vec{\gamma}}{-a+b+c}$$

以下の $\boxed{}$ をうめよ．

(2)　$\vec{\alpha}=(0,12)$, $\vec{\beta}=(-5,0)$, $\vec{\gamma}=(9,0)$ とする．
$\vec{j_1}$ の成分表示を求めよ．

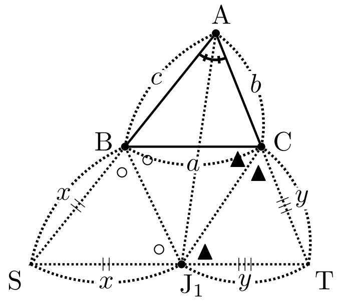


★ 傍接円と傍心

三角形の三辺（延長線も含む）と接する円は内接円以外に 3 つある（左図はその 1 つ円 $\mathrm{J_1}$）．これら 3 つの円を △ABC の **傍接円** といい，その中心（左上図の $\mathrm{J_1, J_2, J_3}$）を △ABC の **傍心** という．傍心は外角の二等分線の交点である（証明は反射テスト初等幾何にある）．

★ 傍心の位置ベクトル

△ABC の傍心 $\mathrm{J_1}$ の位置ベクトルを $\vec{j_1}$ とすると，$\displaystyle \boldsymbol{\vec{j_1}=\frac{-a\vec{\alpha}+b\vec{\beta}+c\vec{\gamma}}{-a+b+c}}$



(1)
$\mathrm{J_1}$ を通り辺 BC と平行な直線と AB, AC との延長線との交点を
それぞれ左図のように S, T とする．
錯角が等しいので，　$\angle\mathrm{BJ_1S}=\angle\mathrm{J_1BC}$ かつ $\angle\mathrm{CJ_1T}=\angle\mathrm{J_1CB}$
ゆえに $\triangle\mathrm{SJ_1B}$ と $\triangle\mathrm{TJ_1C}$ は二等辺三角形となり，　$\mathrm{SB}=\mathrm{SJ_1}$ かつ $\mathrm{TC}=\mathrm{TJ_1}$
$\mathrm{SB}=\mathrm{SJ_1}=x$, $\mathrm{TC}=\mathrm{TJ_1}=y$ とおくと，　$\mathrm{ST}=\mathrm{SJ_1}+\mathrm{TJ_1}=x+y$

原点を O とする．
BC // ST だから，　$c:x=b:\boxed{\boldsymbol{y}}$　…①
BC // ST だから，$\triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\boxed{\mathbf{AST}}$
⇒　$\mathrm{BC}:\mathrm{ST}=\mathrm{AB}:\mathrm{AS}$
⇒　$a:(x+y)=c:(\boxed{\boldsymbol{c+x}})$　…②
①, ② を x, y について解くと，

$$x=\frac{\boxed{\boldsymbol{ca}}}{b+c-a}\ \text{かつ}\ y=\frac{\boxed{\boldsymbol{ab}}}{b+c-a}$$

以上から，

$$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\frac{x+y}{\boxed{\boldsymbol{a}}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{\boxed{\boldsymbol{b+c}}}{b+c-a}(\vec{\beta}-\vec{\alpha})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AT}}=\frac{x+y}{\boxed{\boldsymbol{a}}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{\boxed{\boldsymbol{b+c}}}{b+c-a}(\vec{\gamma}-\vec{\alpha})$$

線分 $\mathrm{AJ_1}$ は∠A の二等分線であるから，
$\mathrm{J_1}$ は ST を $x:y=c:b$ に内分するので，

$$\begin{aligned}\vec{j_1}&=\overrightarrow{\mathrm{OJ_1}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AJ_1}}\\&=\vec{\alpha}+\frac{b}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AS}}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AT}}\\&=\vec{\alpha}+\frac{\boxed{\boldsymbol{b}}}{b+c-a}(\vec{\beta}-\vec{\alpha})+\frac{\boxed{\boldsymbol{c}}}{b+c-a}(\vec{\gamma}-\vec{\alpha})\\&=\frac{-a}{b+c-a}\vec{\alpha}+\frac{b}{b+c-a}\vec{\beta}+\frac{c}{b+c-a}\vec{\gamma}\end{aligned}$$

☆別証明　最後のページ参照．

(2)

$$a=\mathrm{BC}=\left|\vec{\beta}-\vec{\gamma}\right|=|9-(-5)|=14$$

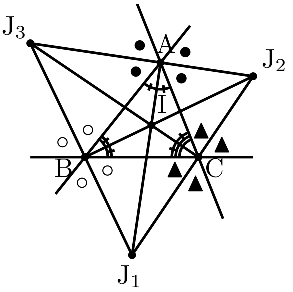
$$b=\mathrm{CA}=\left|\vec{\gamma}-\vec{\alpha}\right|=\sqrt{\{(9-0\}^2+(0-12)^2}=15$$

$$c=\mathrm{AB}=\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|=\sqrt{\{(0-(-5)\}^2+(12-0)^2}=13$$

$$\begin{aligned}\vec{j_1}&=\frac{-a\vec{\alpha}+b\vec{\beta}+c\vec{\gamma}}{-a+b+c}\\&=\frac{-14(0,12)+15(-5,0)+13(9,0)}{-14+15+13}\\&=\boldsymbol{(3,-12)}\end{aligned}$$

　…**答え**

2. 点 A, B, C の位置ベクトルを $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$, $\overrightarrow{\gamma}$ とする．また BC $= a$, CA $= b$, AB $= c$ とする．下図を用いて，次の問に答えよ．
（ S 級 12 分，A 級 16 分，B 級 22 分，C 級 30 分 ）



(1) 点 J_2 の位置ベクトルを $\overrightarrow{j_2}$ とするとき，次の式を示せ．

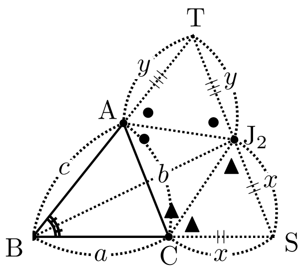
$$\overrightarrow{j_2} = \frac{a\overrightarrow{\alpha} - b\overrightarrow{\beta} + c\overrightarrow{\gamma}}{a-b+c}$$

(2) xy 平面上で A$(0,0)$, B$(8,0)$, C$(0,6)$ とするとき，
△ABC の 3 つの傍心の座標を全て求めよ．

★ 傍心の位置ベクトル

△ABC の傍心 J_1, J_2, J_3の位置ベクトルを $\overrightarrow{j_1}$, $\overrightarrow{j_2}$, $\overrightarrow{j_3}$ とすると，

$$\boldsymbol{\overrightarrow{j_1} = \frac{-a\overrightarrow{\alpha} + b\overrightarrow{\beta} + c\overrightarrow{\gamma}}{-a+b+c}} \qquad \boldsymbol{\overrightarrow{j_2} = \frac{a\overrightarrow{\alpha} - b\overrightarrow{\beta} + c\overrightarrow{\gamma}}{a-b+c}} \qquad \boldsymbol{\overrightarrow{j_3} = \frac{a\overrightarrow{\alpha} + b\overrightarrow{\beta} - c\overrightarrow{\gamma}}{a+b-c}}$$



(1)
J_2 を通り辺 CA と平行な直線と BC, BA との延長線との交点を
それぞれ左図のように S, T とする．
錯角が等しいので， $\angle \mathrm{CJ_2}S = \angle \mathrm{J_2CA}$ かつ $\angle \mathrm{AJ_2T} = \angle \mathrm{J_2AC}$
ゆえに $\triangle \mathrm{SJ_2C}$ と $\triangle \mathrm{TJ_2A}$ は二等辺三角形となり， $\mathrm{SC} = \mathrm{SJ_2}$ かつ $\mathrm{TA} = \mathrm{TJ_2}$
$\mathrm{SC} = \mathrm{SJ_2} = x$, $\mathrm{TA} = \mathrm{TJ_2} = y$ とおくと， $\mathrm{ST} = \mathrm{SJ_2} + \mathrm{TJ_2} = x + y$

原点を O とする．
CA // ST だから， $a : x = c : y$ …①
CA // ST だから，△BCA ∽ △BST
⇒ CA : ST = BC : BS
⇒ $b : (x+y) = a : (a+x)$ …②
①, ② を x , y について解くと，

$$x = \frac{ab}{a-b+c} \text{ かつ } y = \frac{bc}{a-b+c}$$

以上から，

$$\overrightarrow{\mathrm{BS}} = \frac{x+y}{b}\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \frac{c+a}{a-b+c}(\overrightarrow{\gamma} - \overrightarrow{\beta})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BT}} = \frac{x+y}{b}\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \frac{c+a}{a-b+c}(\overrightarrow{\alpha} - \overrightarrow{\beta})$$

線分 $\mathrm{BJ_2}$は∠B の二等分線であるから，
$\mathrm{J_2}$は ST を $x : y = a : c$ に内分するので，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{j_2} &= \overrightarrow{\mathrm{OJ_2}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BJ_2}} \\ &= \overrightarrow{\beta} + \frac{c}{c+a}\overrightarrow{\mathrm{BS}} + \frac{a}{c+a}\overrightarrow{\mathrm{BT}} \\ &= \overrightarrow{\beta} + \frac{c}{a-b+c}(\overrightarrow{\gamma} - \overrightarrow{\beta}) + \frac{a}{a-b+c}(\overrightarrow{\alpha} - \overrightarrow{\beta}) \\ &= \frac{a}{a-b+c}\overrightarrow{\alpha} - \frac{b}{a-b+c}\overrightarrow{\beta} + \frac{c}{a-b+c}\overrightarrow{\gamma}\end{aligned}$$

(2)

$$a = \mathrm{BC} = \left|\overrightarrow{\beta} - \overrightarrow{\gamma}\right| = \sqrt{\{(8-0\}^2 + (0-6)^2} = 10$$

$$b = \mathrm{CA} = \left|\overrightarrow{\gamma} - \overrightarrow{\alpha}\right| = |6-0| = 6$$

$$c = \mathrm{AB} = \left|\overrightarrow{\alpha} - \overrightarrow{\beta}\right| = |8-0| = 8$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{j_1} &= \frac{-a\overrightarrow{\alpha} + b\overrightarrow{\beta} + c\overrightarrow{\gamma}}{-a+b+c} \\ &= \frac{-10(0,0) + 6(8,0) + 8(0,6)}{-10+6+8} \\ &= \boldsymbol{(12, 12)} \quad \textbf{…答え}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{j_2} &= \frac{a\overrightarrow{\alpha} - b\overrightarrow{\beta} + c\overrightarrow{\gamma}}{a-b+c} \\ &= \frac{10(0,0) - 6(8,0) + 8(0,6)}{10-6+8} \\ &= \boldsymbol{(-4, 4)} \quad \textbf{…答え}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{j_3} &= \frac{a\overrightarrow{\alpha} + b\overrightarrow{\beta} - c\overrightarrow{\gamma}}{a+b-c} \\ &= \frac{10(0,0) + 6(8,0) - 8(0,6)}{10+6-8} \\ &= \boldsymbol{(6, -6)} \quad \textbf{…答え}\end{aligned}$$

☆前ページ 1(1) 別証明 $\mathrm{AJ_1}$と BC の交点を K とすると，
内角 A の二等分線 AK から KB : KC = AB : AC ⇒ $\mathrm{BK} = \frac{ac}{b+c}$
内角 B の二等分線 BI から BK : BA = IK : IA ⇒ $\mathrm{AK} = \frac{a+b+c}{b+c}\mathrm{AI}$
外角 B の二等分線$\mathrm{BJ_1}$から $\mathrm{J_1K} : \mathrm{J_1A} = \mathrm{BK} : \mathrm{BA}$ ⇒ $\mathrm{AJ_1} = \frac{b+c}{b+c-a}\mathrm{AK}$ ∴ $\overrightarrow{\mathrm{AJ_1}} = \frac{b+c}{b+c-a} \cdot \frac{a+b+c}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ 以下略