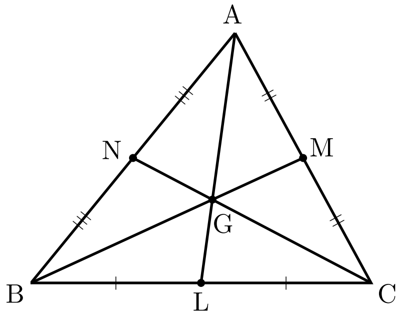
反射テスト　ベクトル　三角形　五心の位置ベクトル　01

1.　点 A, B, C の位置ベクトルを $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$, $\overrightarrow{\gamma}$ とする. また BC $= a$, CA $= b$, AB $= c$ とする. 下図を用いて, 次の問に答えよ.

（ S 級 3 分, A 級 6 分, B 級 9 分, C 級 12 分 ）



(1)　点 G の位置ベクトルを $\overrightarrow{g}$ とするとき,

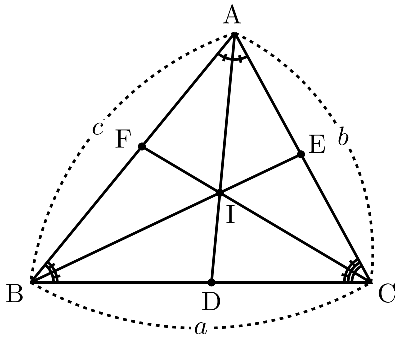
$$\overrightarrow{g} = \frac{\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\gamma}}{3}$$

であることを示せ. ただし, AG : GL = 2 : 1 を使う場合はそれも証明すること.

(2)　$\overrightarrow{\alpha} = (0, 10)$, $\overrightarrow{\beta} = (-8, 0)$, $\overrightarrow{\gamma} = (2, -4)$ とする.
$\overrightarrow{g}$ の成分表示を求めよ.

2.　点 A, B, C の位置ベクトルを $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$, $\overrightarrow{\gamma}$ とする. また BC $= a$, CA $= b$, AB $= c$ とする. 下図を用いて, 次の問に答えよ.

（ S 級 5 分, A 級 9 分, B 級 14 分, C 級 20 分 ）



(1)　点 I の位置ベクトルを $\overrightarrow{i}$ とするとき, 次の式を示せ.

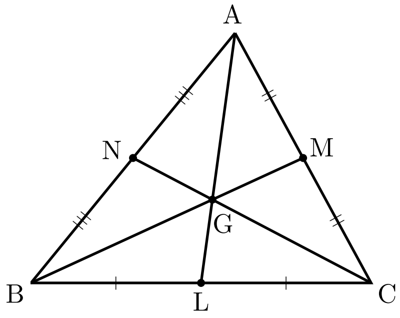
$$\overrightarrow{i} = \frac{a\overrightarrow{\alpha} + b\overrightarrow{\beta} + c\overrightarrow{\gamma}}{a+b+c}$$

(2)　$\overrightarrow{\alpha} = (0, 8)$, $\overrightarrow{\beta} = (-6, 0)$, $\overrightarrow{\gamma} = (15, 0)$ とする.

$\overrightarrow{i}$ の成分表示を求めよ.

反射テスト　ベクトル　三角形　五心の位置ベクトル　01　解答解説

1.　点 A, B, C の位置ベクトルを $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ とする．また $\mathrm{BC}=a$, $\mathrm{CA}=b$, $\mathrm{AB}=c$ とする．下図を用いて，次の問に答えよ．
（ S 級 3 分，A 級 6 分，B 級 9 分，C 級 12 分 ）



(1)　点 G の位置ベクトルを $\vec{g}$ とするとき，
$$\vec{g}=\frac{\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}}{3}$$
であることを示せ．ただし，$\mathrm{AG}:\mathrm{GL}=2:1$ を使う場合はそれも証明すること．

(2)　$\vec{\alpha}=(0,10)$, $\vec{\beta}=(-8,0)$, $\vec{\gamma}=(2,-4)$ とする．
$\vec{g}$ の成分表示を求めよ．

★ 重心の位置ベクトル（重要）

△ABC の重心の位置ベクトルを $\vec{g}$ とすると，　$\boldsymbol{\vec{g}=\dfrac{\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}}{3}}$

☆頻出である．

(1)
原点を O とする．

M は CA の中点だから　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{\vec{\alpha}+\vec{\gamma}}{2}$

$\mathrm{BG}:\mathrm{GM}=s:(1-s)$ とすると，
$$\begin{aligned}\vec{g}&=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+s\overrightarrow{\mathrm{OM}}\\&=(1-s)\vec{\beta}+s\cdot\frac{\vec{\alpha}+\vec{\gamma}}{2}\\&=\frac{s}{2}\vec{\alpha}+(1-s)\vec{\beta}+\frac{s}{2}\vec{\gamma}\end{aligned}$$

N は AB の中点だから　$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{\vec{\alpha}+\vec{\gamma}}{2}$

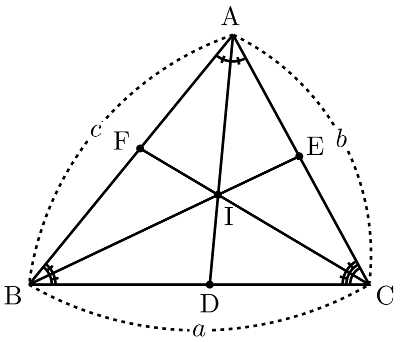
$\mathrm{CG}:\mathrm{GN}=t:(1-t)$ とすると，
$$\begin{aligned}\vec{g}&=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\overrightarrow{\mathrm{ON}}\\&=(1-t)\vec{\gamma}+t\cdot\frac{\vec{\alpha}+\vec{\gamma}}{2}\\&=\frac{t}{2}\vec{\alpha}+\frac{t}{2}\vec{\beta}+(1-t)\vec{\gamma}\end{aligned}$$

以上の結果から，係数比較して，
$$\frac{s}{2}=\frac{t}{2}\quad かつ\quad 1-s=\frac{t}{2}\quad かつ\quad \frac{s}{2}=1-t$$
$\Leftrightarrow\quad s=t=\dfrac{1}{3}$

$\therefore\quad \vec{g}=\dfrac{\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}}{3}$

(2)
$$\begin{aligned}\vec{g}&=\frac{\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}}{3}\\&=\frac{1}{3}\{(0,10)+(-8,0)+(2,-4)\}\\&=\frac{1}{3}(-6,6)\\&=\boldsymbol{(-2,2)}\quad \textbf{…答え}\end{aligned}$$

2. 点 A, B, C の位置ベクトルを $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ とする．また $\mathrm{BC}=a$, $\mathrm{CA}=b$, $\mathrm{AB}=c$ とする．下図を用いて，次の問に答えよ．
（ S 級 5 分，A 級 9 分，B 級 14 分，C 級 20 分 ）



(1) 点 I の位置ベクトルを $\vec{i}$ とするとき，次の式を示せ．

$$\vec{i}=\frac{a\vec{\alpha}+b\vec{\beta}+c\vec{\gamma}}{a+b+c}$$

(2) $\vec{\alpha}=(0,8)$, $\vec{\beta}=(-6,0)$, $\vec{\gamma}=(15,0)$ とする．
$\vec{i}$ の成分表示を求めよ．

★ 内心の位置ベクトル

△ABC の内心の位置ベクトルを $\vec{i}$ とすると，　$\boldsymbol{\vec{i}=\dfrac{a\vec{\alpha}+b\vec{\beta}+c\vec{\gamma}}{a+b+c}}$

(1)
原点を O とする．
線分 AD は∠A の二等分線だから，　$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=c:b$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{b+c}=\frac{b\vec{\beta}+c\vec{\gamma}}{b+c}$$

また　$\mathrm{BD}=\dfrac{c}{b+c}\times a=\dfrac{ca}{b+c}$
線分 BI は∠B の二等分線だから，
$\mathrm{AI}:\mathrm{ID}=c:\dfrac{ca}{b+c}=(b+c):a$

$$\therefore\quad \vec{i}=\frac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(b+c)\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{a+b+c}$$
$$=\frac{a}{a+b+c}\vec{\alpha}+\frac{b+c}{a+b+c}\cdot\left(\frac{b\vec{\beta}+c\vec{\gamma}}{b+c}\right)$$
$$=\frac{a\vec{\alpha}+b\vec{\beta}+c\vec{\gamma}}{a+b+c}$$

(2)
$$a=\mathrm{BC}=\left|\vec{\beta}-\vec{\gamma}\right|=|15-(-6)|=21$$

$$b=\mathrm{CA}=\left|\vec{\gamma}-\vec{\alpha}\right|=\sqrt{\{(15-0\}^2+(0-8)^2}=17$$

$$c=\mathrm{AB}=\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|=\sqrt{\{(0-(-6)\}^2+(8-0)^2}=10$$

$$\vec{i}=\frac{a\vec{\alpha}+b\vec{\beta}+c\vec{\gamma}}{a+b+c}$$
$$=\frac{21(0,8)+17(-6,0)+10(15,0)}{21+17+10}$$
$$=\frac{(0,168)+(-102,0)+(150,0)}{48}$$
$$=\frac{1}{48}(48,168)$$
$$=\left(\mathbf{1},\ \mathbf{\frac{7}{2}}\right)\quad \text{…答え}$$