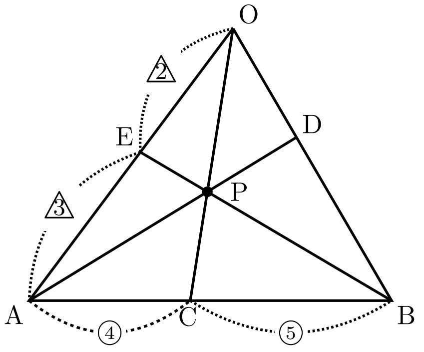
反射テスト　ベクトル　平面上の一点の決定　01

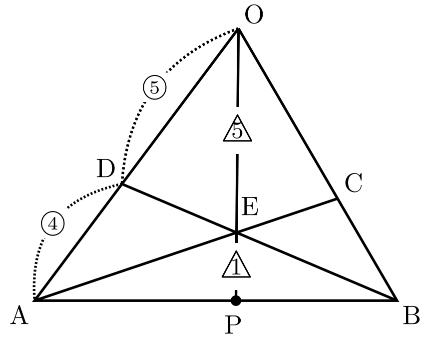
1.　$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とする. 次の条件を満たす $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ.

（ S 級 2 分，A 級 5 分，B 級 7 分，C 級 9 分 ）

(1)



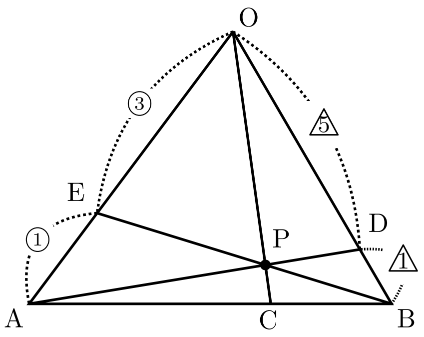
(2)



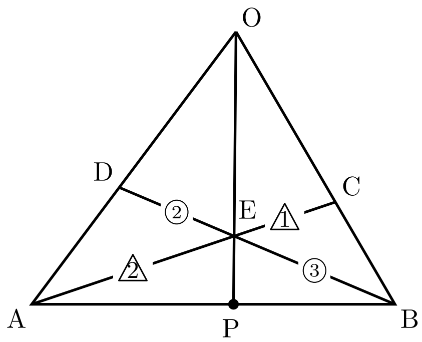
2. $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする. 次の条件を満たす $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ.

(S 級 3 分, A 級 6 分, B 級 8 分, C 級 10 分)

(1)



(2)



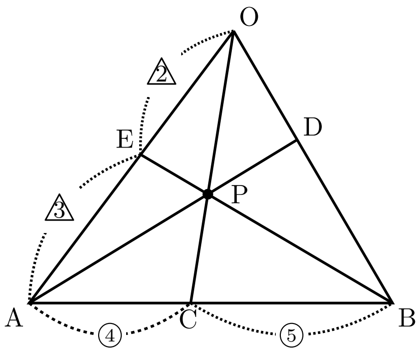
反射テスト　ベクトル　平面上の一点の決定　01　解答解説

1.　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする. 次の条件を満たす $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ.

（ S 級 2 分, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 9 分 ）

★求めるものに名前をつける.（文字でおく！）　←**最重要**
★条件で立式　内分点公式と外分点公式, 直線の交点など

(1)



$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{2}{5}\vec{a}$

P は線分 EB 上にあるから, $0\leqq s\leqq 1$ に対して,
$\mathrm{EP}:\mathrm{PB}=s:(1-s)\Leftrightarrow\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OE}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}$
$\Leftrightarrow\quad\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\cdot\frac{2}{5}\vec{a}+s\vec{b}\quad\cdots$㋐

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{5\vec{a}+4\vec{b}}{5+4}=\frac{5}{9}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}$

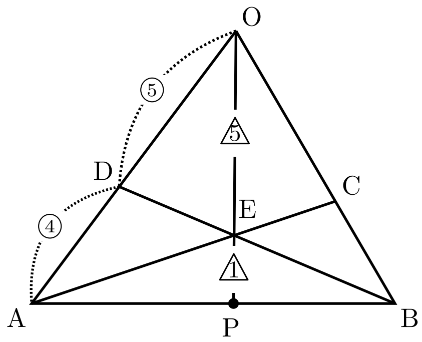
P は線分 OC 上にあるから, $0\leqq t\leqq 1$ に対して,
$\mathrm{OP}:\mathrm{PC}=t:(1-t)\Leftrightarrow\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$
$\Leftrightarrow\quad\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\left(\frac{5}{9}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}\right)$
$\Leftrightarrow\quad\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{5}{9}t\vec{a}+\frac{4}{9}t\vec{b}\quad\cdots$㋑

㋐と㋑から,　$\frac{2}{5}(1-s)=\frac{5}{9}t$　かつ　$s=\frac{4}{9}t$
$\Leftrightarrow\quad s=\frac{8}{33}$　かつ　$t=\frac{6}{11}$

$\therefore\quad\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\boldsymbol{\frac{10}{33}\vec{a}+\frac{8}{33}\vec{b}}$　**…答え**

☆別解
メネラウス・チェバの定理を用いると早い.
ただし上のような連立方程式で解く方法のほうが汎用性があるだろう.

(2)



$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{5}{9}\vec{a}$

E は線分 DB 上にあるから, $0\leqq s\leqq 1$ に対して,
$\mathrm{DE}:\mathrm{EB}=s:(1-s)\Leftrightarrow\overrightarrow{\mathrm{OE}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OD}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}$
$\Leftrightarrow\quad\overrightarrow{\mathrm{OE}}=(1-s)\cdot\frac{5}{9}\vec{a}+s\vec{b}\quad\cdots$㋐

P は線分 AB 上にあるから, $0\leqq t\leqq 1$ に対して,
$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=t:(1-t)\Leftrightarrow\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$
$\Leftrightarrow\quad\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$

E は線分 OP 上にあって, $OE:EP=5:1$
$\Leftrightarrow\quad\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$
$\Leftrightarrow\quad\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{5}{6}(1-t)\vec{a}+\frac{5}{6}t\vec{b}\quad\cdots$㋑

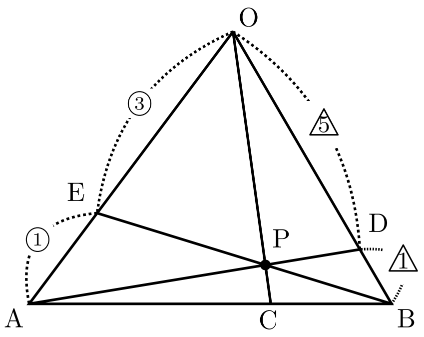
㋐と㋑から,　$\frac{5}{9}(1-s)=\frac{5}{6}(1-t)$　かつ　$s=\frac{5}{6}t$
$\Leftrightarrow\quad s=\frac{5}{8}$　かつ　$t=\frac{3}{4}$

$\therefore\quad\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\boldsymbol{\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}}$　**…答え**

2. $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とする. 次の条件を満たす $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ.

(S 級 3 分, A 級 6 分, B 級 8 分, C 級 10 分)

(1)



$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{3}{4}\vec{a}$

P は線分 EB 上にあるから, $0 \leqq s \leqq 1$ に対して,

$\mathrm{EP} : \mathrm{PB} = s : (1-s) \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OE}} + s\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-s)\cdot\frac{3}{4}\vec{a} + s\vec{b} \quad \cdots$㋐

$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{5}{6}\vec{b}$

P は線分 AD 上にあるから, $0 \leqq t \leqq 1$ に対して,

$\mathrm{AP} : \mathrm{PD} = t : (1-t) \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OD}}$

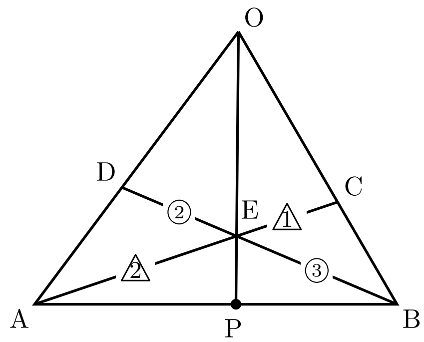
$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t)\vec{a} + t\cdot\frac{5}{6}\vec{b} \quad \cdots$㋑

㋐と㋑から, $\quad \frac{3}{4}(1-s) = 1-t$ かつ $s = \frac{5}{6}t$

$\Leftrightarrow \quad s = \frac{5}{9}$ かつ $t = \frac{2}{3}$

$\therefore \quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{5}{9}\vec{b}}$ **…答え**

(2)



D は線分 OA 上にあるから, $0 \leqq s \leqq 1$ に対して,

$\mathrm{OD} : \mathrm{DA} = s : (1-s) \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OD}} = s\vec{a}$

E は線分 DB 上にあるから, $0 \leqq s \leqq 1$ に対して,

$\mathrm{DE} : \mathrm{EB} = 2 : 3 \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OD}} + \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{3}{5}s\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} \quad \cdots$㋐

C は線分 OB 上にあるから, $0 \leqq t \leqq 1$ に対して,

$\mathrm{OC} : \mathrm{CB} = t : (1-t) \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OC}} = t\vec{b}$

E は線分 AC 上にあって, $\mathrm{AE} : \mathrm{EC} = 2 : 1$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}t\vec{b} \quad \cdots$㋑

㋐と㋑から, $\quad \overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$

(s, t について解くと, $\quad s = \frac{5}{9}$ かつ $t = \frac{3}{5}$)

P は線分 AB 上 $\Leftrightarrow$ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の係数の和が 1 であるから,

$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15}$ より,

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{15}{11}\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{15}{11}\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}\right)$

$\quad = \boldsymbol{\frac{5}{11}\vec{a} + \frac{6}{11}\vec{b}}$ **…答え**