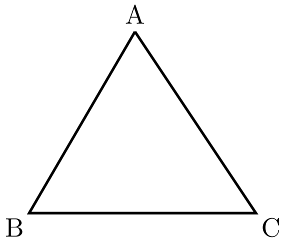
反射テスト　ベクトル　求比　01

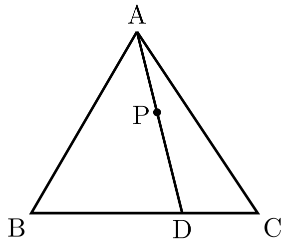
1.　次の条件を満たす点 P を図示せよ．その際必要な線分比も図に書き込むこと．

（ S 級 3 分 30 秒，A 級 5 分，B 級 7 分，C 級 10 分 ）

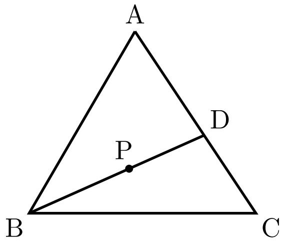
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$



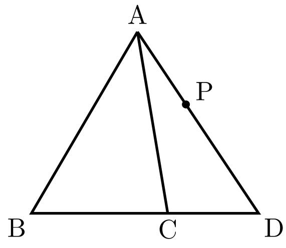
(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{1}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$



(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$



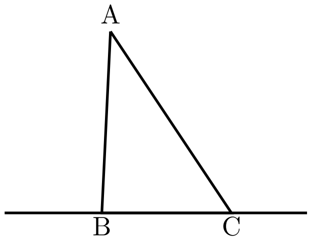
(4)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$



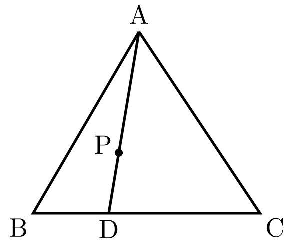
2. 次の条件を満たす点 P を図示せよ．その際必要な線分比も図に書き込むこと．

（ S 級 3 分 30 秒，A 級 5 分，B 級 7 分，C 級 10 分 ）

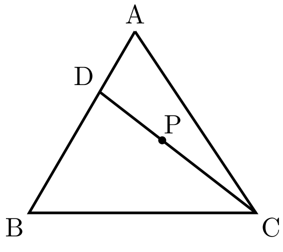
(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{9}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\dfrac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$



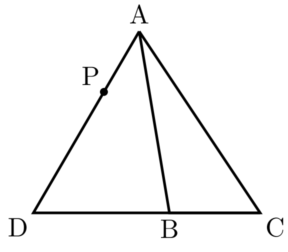
(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$



(3) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$



(4) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$



ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

反射テスト　ベクトル　求比　01　解答解説

1.　次の条件を満たす点 P を図示せよ. その際必要な線分比も図に書き込むこと.

（ S 級 3 分 30 秒, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 10 分 ）

★求めるものに名前をつける.（文字でおく！）　←**最重要**

★内分点公式　線分 AB 上にある点 P が $\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=t:(1-t)$ を満たす　$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$

★直線 AB 上にある点 P がある　$\Leftrightarrow$　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

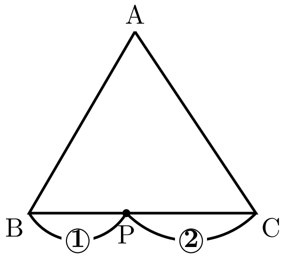
$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$

$\Leftrightarrow$　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ かつ $s+t=1$

☆上の式を見ると, 内分点公式と直線のベクトル方程式は同じ形であることがわかる.
負の比の値を「方向が逆になる」と考えると, 外分比も内分比の形になるので, **全てが統一できる.**
どの場合も $\boldsymbol{\mathrm{PA}:\mathrm{PB}=|t|:|1-t|}$ であり,

$$\begin{cases} t<0 & \Leftrightarrow \text{ 点 P は線分 AB 上にはなく, 半直線 BA 上にある.（線分 AB の外側. ただし A 側）} \\ 0\leqq t\leqq 1 & \Leftrightarrow \text{ 点 P は線分 AB 上（端点も含む）} \\ 1<t & \Leftrightarrow \text{ 点 P は線分 AB 上にはなく, 半直線 AB 上にある.（線分 AB の外側. ただし B 側）} \end{cases}$$

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

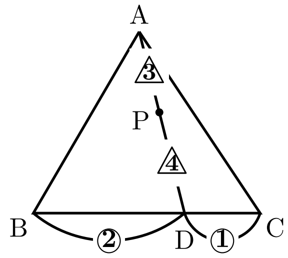


$\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$
係数の和が 1 だから,
点 P は線分 BC 上にある
$\mathrm{PB}:\mathrm{PC}=p:(1-p)$ とおく.
$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-p)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+p\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

与式と比べて,　$1-p=\frac{2}{3}$ かつ $p=\frac{1}{3}$　$\Leftrightarrow$　$p=\frac{1}{3}$

$\therefore$　$\mathrm{PB}:\mathrm{PC}=\frac{1}{3}:\frac{2}{3}=1:2$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$



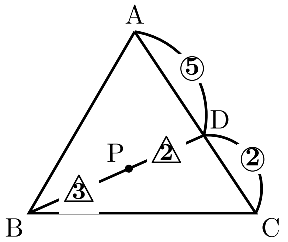
・D が直線 BC 上にある
$\mathrm{DB}:\mathrm{DC}=p:(1-p)$ とおく.
$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(1-p)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+p\overrightarrow{\mathrm{AC}}$
・P が直線 AD 上にある
$\mathrm{PA}:\mathrm{PD}=q:(1-q)$ とおく.
$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=q\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

$\therefore\overrightarrow{\mathrm{AP}}=q\left\{(1-p)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+p\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\}=(1-p)q\overrightarrow{\mathrm{AB}}+pq\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

与式と比較 $(1-p)q=\frac{1}{7}$ かつ $pq=\frac{2}{7}$　$\Leftrightarrow$　$p=\frac{2}{3},\ q=\frac{3}{7}$

$$\therefore\ \begin{cases}\mathrm{DB}:\mathrm{DC}=\frac{2}{3}:\left(1-\frac{2}{3}\right)=2:1\\ \mathrm{PA}:\mathrm{PD}=\frac{3}{7}:\left(1-\frac{3}{7}\right)=3:4\end{cases}$$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$



・D が直線 AC 上にある
$\mathrm{DA}:\mathrm{DC}=p:(1-p)$ とおく.
$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=p\overrightarrow{\mathrm{AC}}$
・P が直線 BD 上にある
$\mathrm{PB}:\mathrm{PD}=q:(1-q)$ とおく.
$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-q)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+q\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

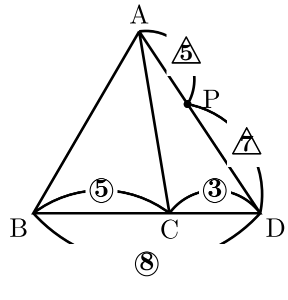
$$\begin{aligned}\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}}&=(1-q)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+q\cdot\left(p\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\\&=(1-q)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+pq\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

与式と比べて,　$1-q=\frac{2}{5}$ かつ $pq=\frac{3}{7}$

$\Leftrightarrow$　$p=\frac{5}{7},\ q=\frac{3}{5}$

$$\therefore\ \begin{cases}\mathrm{DA}:\mathrm{DC}=\frac{5}{7}:\left(1-\frac{5}{7}\right)=5:2\\ \mathrm{PB}:\mathrm{PD}=\frac{3}{5}:\left(1-\frac{3}{5}\right)=3:2\end{cases}$$

(4)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$



・D が直線 BC 上にある
実数 p を用いれば,
$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(1-p)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+p\overrightarrow{\mathrm{AC}}$
・P が直線 AD 上にある
$\mathrm{PA}:\mathrm{PD}=q:(1-q)$ とおく.
$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=q\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}}&=q\left\{(1-p)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+p\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\}\\&=(1-p)q\overrightarrow{\mathrm{AB}}+pq\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

与式と比べて,　$(1-p)q=-\frac{1}{4}$ かつ $pq=\frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow$　$p=\frac{8}{5},\ q=\frac{5}{12}$

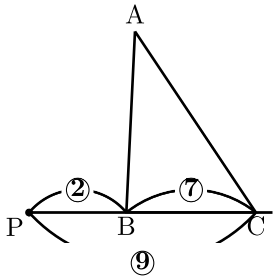
$$\therefore\ \begin{cases}\mathrm{DB}:\mathrm{DC}=\frac{8}{5}:\left|1-\frac{8}{5}\right|=8:3\\ \mathrm{PA}:\mathrm{PD}=\frac{5}{12}:\left(1-\frac{5}{12}\right)=5:7\end{cases}$$

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2.　次の条件を満たす点 P を図示せよ．その際必要な線分比も図に書き込むこと．

（ S 級 3 分 30 秒，A 級 5 分，B 級 7 分，C 級 10 分 ）

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{9}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\dfrac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$



$\frac{9}{7}+\left(-\frac{2}{7}\right)=1$

係数の和が 1 だから，

点 P は直線 BC 上にある

実数 p を用いて，

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-p)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+p\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

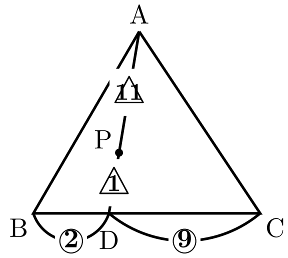
与式と比べて，　$1-p=\frac{9}{7}$ かつ $p=-\frac{2}{7}$　$\Leftrightarrow$　$p=-\frac{2}{7}$

$p<0$ であるから，線分 BC の外側にある．

上図でいえば，B の左側に P はある．

$\therefore$　$\mathrm{PB}:\mathrm{PC}=\left|-\frac{2}{7}\right|:\left\{1-\left(-\frac{2}{7}\right)\right\}=2:9$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$



・D が直線 BC 上にある

$\mathrm{DB}:\mathrm{DC}=p:(1-p)$ とおく．

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(1-p)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+p\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

・P が直線 AD 上にある

$\mathrm{PA}:\mathrm{PD}=q:(1-q)$ とおく．

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=q\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

$\therefore$　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=q\left\{(1-p)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+p\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\}$

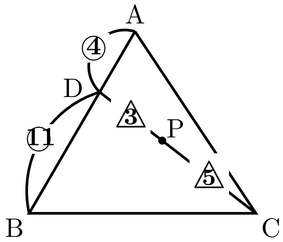
$=(1-p)q\overrightarrow{\mathrm{AB}}+pq\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

与式と比べて，　$(1-p)q=\frac{3}{4}$ かつ $pq=\frac{1}{6}$

$\Leftrightarrow$　$p=\frac{2}{11}$，$q=\frac{11}{12}$

$\therefore$　$\begin{cases}\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\frac{2}{11}:\left(1-\frac{2}{11}\right)=2:9\\ \mathrm{AP}:\mathrm{PD}=\frac{11}{12}:\left(1-\frac{11}{12}\right)=11:1\end{cases}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$



・D が直線 AB 上にある

$\mathrm{DA}:\mathrm{DB}=p:(1-p)$ とおく．

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=p\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

・P が直線 DC 上にある

$\mathrm{PD}:\mathrm{PC}=q:(1-q)$ とおく．

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-q)\overrightarrow{\mathrm{AD}}+q\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$\therefore$　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-q)\cdot\left(p\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)+q\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

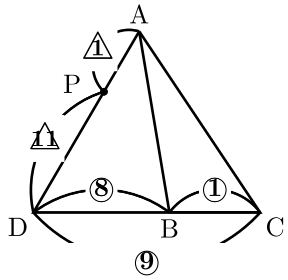
$=p(1-q)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+q\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

与式と比べて，　$p(1-q)=\frac{1}{6}$ かつ $q=\frac{3}{8}$

$\Leftrightarrow$　$p=\frac{4}{15}$，$q=\frac{3}{8}$

$\therefore$　$\begin{cases}\mathrm{AD}:\mathrm{DB}=\frac{4}{15}:\left(1-\frac{4}{15}\right)=4:11\\ \mathrm{DP}:\mathrm{PC}=\frac{3}{8}:\left(1-\frac{3}{8}\right)=3:5\end{cases}$

(4)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$



・D が直線 BC 上にある

実数 p を用いれば，

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(1-p)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+p\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

・P が直線 AD 上にある

$\mathrm{PA}:\mathrm{PD}=q:(1-q)$ とおく．

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=q\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

$\therefore$　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=q\left\{(1-p)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+p\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\}$

$=(1-p)q\overrightarrow{\mathrm{AB}}+pq\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

与式と比べて，　$(1-p)q=\frac{3}{4}$ かつ $pq=-\frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow$　$p=-8$，$q=\frac{1}{12}$

$\therefore$　$\begin{cases}\mathrm{DB}:\mathrm{DC}=|-8|:\{1-(-8)\}=8:9\\ \mathrm{AP}:\mathrm{PD}=\frac{1}{12}:\left(1-\frac{1}{12}\right)=1:11\end{cases}$

© 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）