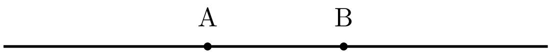
反射テスト　ベクトル　内分・外分の判定　01

1.　点 P を線分比がわかるように下図に示せ.（ S 級 1 分, A 級 2 分, B 級 3 分, C 級 5 分 ）

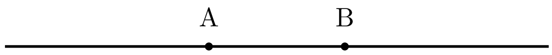
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{8}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$



(4)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (t+1)\overrightarrow{\mathrm{OA}} - t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　（ $t > 0$ ）



2.　点 P を線分比がわかるように下図に示せ.（ S 級 1 分, A 級 2 分, B 級 3 分, C 級 5 分 ）

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = -\dfrac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{11}{6}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{9}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \dfrac{5}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

(4)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　（ $t < 0$ ）

反射テスト　ベクトル　内分・外分の判定　01　解答解説

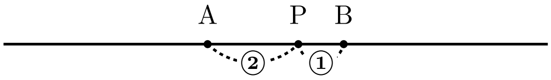
1.　点 P を線分比がわかるように下図に示せ.（ S 級 1 分, A 級 2 分, B 級 3 分, C 級 5 分 ）

★実数 m, n に対して,

$\boldsymbol{m+n=1}$ **かつ** $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{m}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \boldsymbol{n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

⇔　**点 P は直線 AB 上にあり, かつ** $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{m} \textbf{ が負 であれば　P は線分 AB を } |\boldsymbol{n}| : |\boldsymbol{m}| \textbf{ に外分する.（ B の外 ）} \\ \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \textbf{ ともに正 であれば　P は線分 AB を } |\boldsymbol{n}| : |\boldsymbol{m}| \textbf{ に内分する.} \\ \boldsymbol{n} \textbf{ が負 であれば　P は線分 AB を } |\boldsymbol{n}| : |\boldsymbol{m}| \textbf{ に外分する.（ A の外 ）} \end{array}\right.$

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$



$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$　⇒　点 P は直線 AB 上にある.

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ ともに係数が正だから

線分 AB を　$\left|\frac{2}{3}\right| : \left|\frac{1}{3}\right| = 2 : 1$　に内分する.

☆ P の位置を間違えない方法

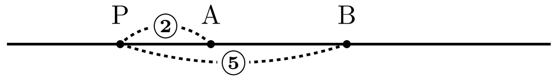
点 O と点 A が一致すると仮定すると,

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$\quad = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AA}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

よって, 線分比が PA : AB = 2 : 3 であることがわかる.

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$



$\frac{5}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) = 1$　⇒　点 P は直線 AB 上にある.

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の係数が負だから

線分 AB を　$\left|-\frac{2}{3}\right| : \left|\frac{5}{3}\right| = 2 : 5$　に外分する.

☆ P の位置が線分 AB の右左どちらにあるか特定する方法

点 O と点 A が一致すると仮定すると,

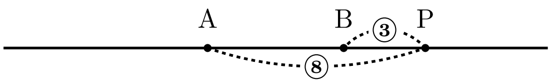
$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$\quad = \frac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{AA}} - \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

よって, 点 P は A の左にあることがわかる.

また, 線分比が PA : AB = 2 : 3 であることもわかる.

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = -\dfrac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{8}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$



$-\frac{3}{5} + \frac{8}{5} = 1$　⇒　点 P は直線 AB 上にある.

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の係数が負だから

線分 AB を　$\left|\frac{8}{5}\right| : \left|-\frac{3}{5}\right| = 8 : 3$　に外分する.

☆ P の位置が線分 AB の右左どちらにあるか特定する方法

点 O と点 A が一致すると仮定すると,

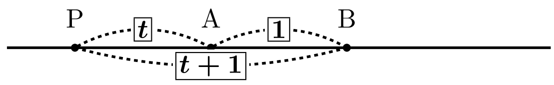
$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{8}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$\quad = -\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AA}} + \frac{8}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \frac{8}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

よって, 点 P は B の右にあることがわかる.

また, 線分比が PA : AB = 8 : 5 であることもわかる.

(4)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (t+1)\overrightarrow{\mathrm{OA}} - t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　（ $t > 0$ ）



$(t+1) + (-t) = 1$　⇒　点 P は直線 AB 上にある.

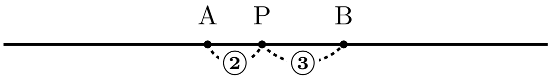
$t > 0$ のとき, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の係数 $-t$ が負だから

線分 AB を　$|-t| : |t+1| = t : (t+1)$　に外分する.

∴　$\mathrm{AB} = \boxed{t+1} - \boxed{t} = \boxed{1}$

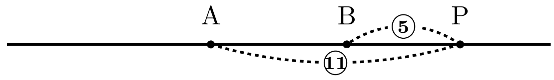
2. 点 P を線分比がわかるように下図に示せ.（ S 級 1 分, A 級 2 分, B 級 3 分, C 級 5 分 ）

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$



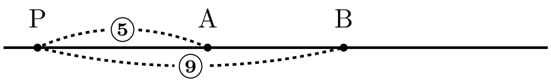
$\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1 \quad \Rightarrow$ 　点 P は直線 AB 上にある.
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ ともに係数が正だから
線分 AB を　$\left|\frac{2}{5}\right| : \left|\frac{3}{5}\right| = 2 : 3$　に内分する.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = -\dfrac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{11}{6}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$



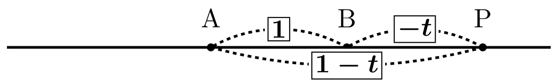
$-\frac{5}{6} + \frac{11}{6} = 1 \quad \Rightarrow$ 　点 P は直線 AB 上にある.
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の係数が負だから
線分 AB を　$\left|\frac{11}{6}\right| : \left|-\frac{5}{6}\right| = 11 : 5$　に外分する.

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{9}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \dfrac{5}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$



$\frac{9}{4} + \left(-\frac{5}{4}\right) = 1 \quad \Rightarrow$ 　点 P は直線 AB 上にある.
$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の係数が負だから
線分 AB を　$\left|-\frac{5}{4}\right| : \left|\frac{9}{4}\right| = 5 : 9$　に外分する.

(4) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　（ $t < 0$ ）



$t + (1-t) = 1 \quad \Rightarrow$ 　点 P は直線 AB 上にある.
$t < 0$ のとき, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の係数 t が負だから
線分 AB を　$|1-t| : |t| = (1-t) : (-t)$　に外分する.
$\therefore$　$\mathrm{AB} = \boxed{1-t} - \boxed{-t} = \boxed{1}$