

反射テスト ベクトル ベクトル方程式 四角形と条件 01

1. 四角形 ABCD の頂点 A, B, C, D の位置ベクトルをそれぞれ \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , \vec{d} とする. 次の間に答えよ.
(S 級 1 分, A 級 2 分 30 秒, B 級 4 分, C 級 6 分)
- (1) 四角形 ABCD が平行四辺形になるための必要十分条件を求めよ.

- (2) 四角形 ABCD が長方形になるための必要十分条件を求めよ.

2. 四角形 ABCD の頂点 A, B, C, D の位置ベクトルをそれぞれ \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , \vec{d} とする. 次の間に答えよ.
(S 級 1 分 15 秒, A 級 2 分 40 秒, B 級 3 分 40 秒, C 級 5 分)

(1) 四角形 ABCD が平行四辺形になるための必要十分条件を求めよ.

(2) 四角形 ABCD がひし形になるための必要十分条件を求めよ.

(3) 四角形 ABCD が正方形になるための必要十分条件を求めよ.

反射テスト ベクトル ベクトル方程式 四角形と条件 01 解答解説

1. 四角形 ABCD の頂点 A, B, C, D の位置ベクトルをそれぞれ \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , \vec{d} とする. 次の間に答えよ.
(S 級 1 分, A 級 2 分 30 秒, B 級 4 分, C 級 6 分)

☆補足

[反射テスト「四角形の定義と性質」](#) 定義や性質に関する知識に不安のある方は, この反射テストをしてみましょう.

- (1) 四角形 ABCD が平行四辺形になるための必要十分条件を求めよ.

四角形 ABCD が平行四辺形.

⇔ 四角形 ABCD の 1 組の対辺が平行かつ長さが等しい.

$$\Leftrightarrow \vec{a} - \vec{b} = \vec{d} - \vec{c}$$

☆別解 式変形して, これも正解.

$$\Leftrightarrow \vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$$

両辺を 2 で割れば, 「対角線が互いの中点で交わる」ことが同値であることもわかる.

$$\Leftrightarrow \vec{a} - \vec{d} = \vec{b} - \vec{c}$$

もちろんこれも正解. これらから平行四辺形の定義 (2 組の対辺が平行な四角形) もわかる.

- (2) 四角形 ABCD が長方形になるための必要十分条件を求めよ.

四角形 ABCD が長方形.

⇔ 四角形 ABCD が平行四辺形 かつ 2 つの対角線の長さが等しい.

$$\Leftrightarrow \vec{a} - \vec{b} = \vec{d} - \vec{c} \text{ かつ } |\vec{a} - \vec{c}| = |\vec{b} - \vec{d}|$$

☆別解 4 つの内角が等しい平行四辺形 ⇔ 隣の角 (同側内角) が等しい平行四辺形

⇔ 1 つの内角が 90° である平行四辺形

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{d} - \vec{c} \text{ かつ } (\vec{d} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$$

2. 四角形 ABCD の頂点 A, B, C, D の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ とする. 次の間に答えよ.
 (S 級 1 分 15 秒, A 級 2 分 40 秒, B 級 3 分 40 秒, C 級 5 分)

- (1) 四角形 ABCD が平行四辺形になるための必要十分条件を求めよ.

四角形 ABCD が平行四辺形.

⇔ 四角形 ABCD の 1 組の対辺が平行かつ長さが等しい.

$$\Leftrightarrow \vec{a} - \vec{b} = \vec{d} - \vec{c}$$

☆別解 式変形して, これも正解.

$$\Leftrightarrow \vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$$

両辺を 2 で割れば, 「対角線が互いの midpoint で交わる」ことが同値であることもわかる.

$$\Leftrightarrow \vec{a} - \vec{d} = \vec{b} - \vec{c}$$

もちろんこれも正解. これらから平行四辺形の定義 (2 組の対辺が平行な四角形) もわかる.

- (2) 四角形 ABCD がひし形になるための必要十分条件を求めよ.

四角形 ABCD がひし形.

⇔ 四角形 ABCD が平行四辺形 かつ 4 つの辺の長さが等しい.

⇔ 四角形 ABCD が平行四辺形 かつ 隣り合う辺の長さが等しい.

$$\Leftrightarrow \vec{a} - \vec{b} = \vec{d} - \vec{c} \quad \text{かつ} \quad |\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{d}|$$

☆別解 対角線が直交する平行四辺形

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{d} - \vec{c} \quad \text{かつ} \quad (\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{d}) = 0$$

- (3) 四角形 ABCD が正方形になるための必要十分条件を求めよ.

四角形 ABCD が正方形.

⇔ 四角形 ABCD が長方形かつひし形.

$$\Leftrightarrow \vec{a} - \vec{b} = \vec{d} - \vec{c} \quad \text{かつ} \quad |\vec{a} - \vec{c}| = |\vec{b} - \vec{d}| \quad \text{かつ} \quad |\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{d}|$$

1(2) や 2(2) を参考に別解も考えてみよう.