

反射テスト ベクトル ベクトル方程式 円の接線 01

1. 円の接線を表すベクトル方程式を作りたい. 以下の設問に答えよ. (S級1分, A級2分, B級3分, C級5分)

(1) ある定点を通り, 法線ベクトル \vec{n} をもつ直線のベクトル方程式を作りたい. ある定点を点 A (\vec{a}), 直線上の動点 P の位置ベクトル \vec{p} として式を作れ. ただし法線ベクトルは直線の方法ベクトルに対して垂直なベクトルのことである.

(2) 円とはある定点から一定の距離にある点の集合である. ある定点を原点 O ($\vec{0}$), 一定の距離を r とする. 円周上の点 P の位置ベクトル \vec{p} も用いて関係式を作れ.

(3) (2) で作った関係式を円のベクトル方程式という. 原点を中心とする半径 r の円周上に定点 A をとり, その位置ベクトルを \vec{a} とする. 動点 P の位置ベクトルを \vec{p} として, 接線のベクトル方程式を作れ. 接線の方法ベクトルと必ず垂直になるベクトルを考えて, (1) を利用すること.

2. 円の接線を表すベクトル方程式を作りたい. 以下の設問に答えよ. (S 級 1 分 10 秒, A 級 2 分, B 級 3 分, C 級 5 分)

(1) 半径 1 の円周上の点 P の位置ベクトルを \vec{p} , 中心の位置ベクトルを \vec{c} とする. この円のベクトル方程式を作れ.

(2) (1) の円周上に定点 A をとり, その位置ベクトルを \vec{a} とする. この点 A を通る円の接線を求めたい. 接線上の動点 P の位置ベクトルを \vec{p} とし, 接線のベクトル方程式を作れ.

(3) 円の半径を r とすれば (2) はどうなるか示せ.

反射テスト ベクトル ベクトル方程式 円の接線 01 解答解説

1. 円の接線を表すベクトル方程式を作りたい. 以下の設問に答えよ. (S級1分, A級2分, B級3分, C級5分)

★ベクトル方程式 (円) 中心 $C(\vec{c})$, 半径 r の円周上の動点 P を表すベクトル方程式は $|\vec{p} - \vec{c}| = r$

(1) ある定点を通り, 法線ベクトル \vec{n} をもつ直線のベクトル方程式を作りたい. ある定点を点 $A(\vec{a})$, 直線上の動点 P の位置ベクトル \vec{p} として式を作れ. ただし法線ベクトルは直線の方法ベクトルに対して垂直なベクトルのことである.

$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$$

(2) 円とはある定点から一定の距離にある点の集合である. ある定点を原点 $O(\vec{0})$, 一定の距離を r とする. 円周上の点 P の位置ベクトル \vec{p} も用いて関係式を作れ.

$$|\vec{p} - \vec{0}| = r \quad \Leftrightarrow \quad |\vec{p}| = r$$

☆これが原点を中心とする半径 r の円を表すベクトル方程式である.

(3) (2) で作った関係式を円のベクトル方程式という. 原点を中心とする半径 r の円周上に定点 A をとり, その位置ベクトルを \vec{a} とする. 動点 P の位置ベクトルを \vec{p} として, 接線のベクトル方程式を作れ. 接線の方法ベクトルと必ず垂直になるベクトルを考えて, (1) を利用すること.

接線 AP と円の半径 AO が必ず直交することに注目すれば,

$$AP \perp AO \quad \Leftrightarrow \quad \vec{AP} \cdot \vec{AO} = 0$$

$$\therefore (\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{0} - \vec{a}) = 0 \quad \text{ただし, } |\vec{a}| = r$$

$$\Leftrightarrow (\vec{p} - \vec{a}) \cdot \vec{a} = 0 \quad \text{ただし, } |\vec{a}| = r \quad \leftarrow \star$$

$$\Leftrightarrow \vec{p} \cdot \vec{a} = r^2 \quad \text{かつ} \quad |\vec{a}| = r \quad \leftarrow \star \text{ここまで変形してもよい.}$$

☆「ただし～」も考慮すること.

2. 円の接線を表すベクトル方程式を作りたい. 以下の設問に答えよ. (S級1分10秒, A級2分, B級3分, C級5分)

★ベクトル方程式 (円) 中心 $C(\vec{c})$, 半径 r の円周上の動点 P を表すベクトル方程式は $|\vec{p} - \vec{c}| = r$

(1) 半径1の円周上の点 P の位置ベクトルを \vec{p} , 中心の位置ベクトルを \vec{c} とする. この円のベクトル方程式を作れ.

$$\therefore |\vec{p} - \vec{c}| = 1$$

☆位置ベクトルの名前を自分で付けて, ベクトル方程式を作ることができるように.

(2) (1)の円周上に定点 A をとり, その位置ベクトルを \vec{a} とする. この点 A を通る円の接線を求めたい. 接線上の動点 P の位置ベクトルを \vec{p} として, 接線のベクトル方程式を作れ.

接線 AP と円の半径 AC が必ず直交することに注目すれば,

$$AP \perp AC \Leftrightarrow \vec{AP} \cdot \vec{AC} = 0$$

$$\therefore (\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0 \quad \text{ただし, } |\vec{a} - \vec{c}| = 1$$

(3) 円の半径を r とすれば (2) はどうなるか示せ.

$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0 \quad \text{ただし, } |\vec{a} - \vec{c}| = r$$