反射テスト　ベクトル　ベクトル方程式　円　01

1.　次のベクトル方程式が表す図形を例にならって示せ．どの図形においても定点A, B, 動点Pの位置ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{p}$ とする．ただし原点はOとし，その位置ベクトルは $\overrightarrow{0}$ とする．（ S 級1分，A 級2分30秒，B 級4分，C 級6分 ）

例　$\left|\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a}\right|=1$　⇒　**中心 A，半径1の円**

(1)　$\left|\overrightarrow{p}\right|=2$

(2)　$\left|2\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a}\right|=1$

(3)　$\left|\overrightarrow{p}-\dfrac{\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}}{2}\right|=1$

(4)　$\left(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a}\right)\cdot\left(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{b}\right)=0$

2. 次のベクトル方程式が表す図形を例にならって示せ．どの図形においても定点 A, B, C, 動点 P の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{p}$ とする．ただし原点は O とし，その位置ベクトルは $\vec{0}$ とする．

（ S 級 1 分 20 秒，A 級 2 分 30 秒，B 級 4 分，C 級 6 分 ）

例 $\left|\vec{p}-\vec{a}\right|=1 \quad \Rightarrow$ **中心 A，半径 1 の円**

(1) $\left|-\vec{p}\right|=5$

(2) $\left|\dfrac{2\vec{p}-\vec{a}-\vec{b}}{2}\right|=2$

(3) $\left|\vec{p}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right|=1$

(4) $\left|\vec{p}\right|^2=\vec{a}\cdot\vec{p}$

反射テスト　ベクトル　ベクトル方程式　円　01　解答解説

1.　次のベクトル方程式が表す図形を例にならって示せ．どの図形においても定点 A, B, 動点 P の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{p}$ とする．ただし原点は O とし，その位置ベクトルは $\vec{0}$ とする．（ S 級 1 分，A 級 2 分 30 秒，B 級 4 分，C 級 6 分 ）

例　$\left|\vec{p}-\vec{a}\right|=1$　$\Rightarrow$　**中心 A，半径 1 の円**

★ ベクトル方程式（円）　中心 A$\left(\vec{a}\right)$，半径 r の円周上の動点 P を表すベクトル方程式は　$\boldsymbol{\left|\vec{p}-\vec{a}\right|=r}$

(1)　$\left|\vec{p}\right|=2$

$\Leftrightarrow$　$\left|\vec{p}-\vec{0}\right|=2$

$\therefore$　**中心 O，半径 2 の円**

(2)　$\left|2\vec{p}-\vec{a}\right|=1$

$\Leftrightarrow$　$\left|\vec{p}-\dfrac{\vec{a}}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$

$\therefore$　**線分 OA の中点を中心とする，半径 $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ の円**

(3)　$\left|\vec{p}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|=1$

$\therefore$　**線分 AB の中点を中心とする，半径 1 の円**

★線分 AB の中点の位置ベクトル　$\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

(4)　$\left(\vec{p}-\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{p}-\vec{b}\right)=0$

$\Leftrightarrow$　$\left|\vec{p}\right|^2-\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{p}+\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$\Leftrightarrow$　$\left|\vec{p}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|^2=\left|\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}$

$\Leftrightarrow$　$\left|\vec{p}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|^2=\left|\dfrac{\vec{a}-\vec{b}}{2}\right|^2$

$\therefore$　**線分 AB の中点を中心とし，**
半径を線分 AB の半分とする円

$\therefore$　**線分 AB を直径とする円**

☆別解 1(★円周角の定理)
元のベクトル方程式に注目すると，PA $\perp$ PB であることがわかる．動点 P は定点 A, B に対して $\angle\mathrm{APB}=90^\circ$ を満たしながら動く．円周角の定理から，点 P が線分 AB を直径とする円周上にあることがわかる．

☆別解 2(★動点 (x,y))
$\vec{p}=(x,y)$，$\vec{a}=(0,0)$，$\vec{b}=(2,0)$ などとして x,y の関係式を導くと，　$(x-1)^2+y^2=1^2$

★直径を線分 AB とする円のベクトル方程式
$\left(\vec{p}-\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{p}-\vec{b}\right)=0$

2. 次のベクトル方程式が表す図形を例にならって示せ．どの図形においても定点 A, B, C, 動点 P の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{p}$ とする．ただし原点は O とし，その位置ベクトルは $\vec{0}$ とする．

（ S 級 1 分 20 秒，A 級 2 分 30 秒，B 級 4 分，C 級 6 分 ）

例 $\left|\vec{p}-\vec{a}\right|=1 \quad \Rightarrow$ **中心 A，半径 1 の円**

(1) $\left|-\vec{p}\right|=5$

$\Leftrightarrow \quad \left|\vec{0}-\vec{p}\right|=5$

$\therefore$ **中心 O，半径 5 の円**

(2) $\left|\dfrac{2\vec{p}-\vec{a}-\vec{b}}{2}\right|=2$

$\Leftrightarrow \quad \left|\vec{p}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|=2$

$\therefore$ **線分 AB の中点を中心とする，半径 2 の円**

(3) $\left|\vec{p}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right|=1$

$\therefore$ **△ABC の重心を中心とする，半径 1 の円**

★ △ABC の重心の位置ベクトル $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

(4) $\left|\vec{p}\right|^2=\vec{a}\cdot\vec{p}$

$\Leftrightarrow \quad \left|\vec{p}\right|^2-\vec{a}\cdot\vec{p}=0$

$\Leftrightarrow \quad \left(\vec{p}-\vec{a}\right)\cdot\vec{p}=0$

$\Leftrightarrow \quad \left(\vec{p}-\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{p}-\vec{0}\right)=0$

$\therefore$ **線分 OA を直径とする円**

☆1(4) の応用
内積が 0 だから PA $\perp$ PO ．動点 P は定点 O, A に対して $\angle\mathrm{OPA}=90^\circ$ を満たして動く．円周角の定理から，
点 P が線分 OA を直径とする円周上にあることがわかる．