

反射テスト ベクトル 三角形の面積 ② 内積の公式 01

1. $\triangle ABC$ の面積を求めよ。(S級 50 秒, A級 1 分 30 秒, B級 3 分, C級 5 分)

$$(1) \begin{cases} AB = 2 \\ AC = 3 \\ \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} BC = \sqrt{3} \\ CA = \sqrt{5} \\ \vec{BC} \cdot \vec{CA} = -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} AB = 3t \\ BC = t \\ \vec{BC} \cdot \vec{BA} = -\sqrt{5}t^2 \end{cases} \quad (t \text{ は正の実数})$$

2. $\triangle ABC$ の面積を求めよ。(S 級 50 秒, A 級 1 分 30 秒, B 級 3 分, C 級 5 分)

$$(1) \begin{cases} AB = 4 \\ AC = 2 \\ \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4\sqrt{3} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} AB = 2 \\ BC = \sqrt{5} \\ \vec{AB} \cdot \vec{BC} = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} BC = 5t \\ CA = 2t \\ \vec{CA} \cdot \vec{CB} = -6t^2 \end{cases} \quad (t \text{ は正の実数})$$

反射テスト ベクトル 三角形の面積 ② 内積の公式 01 解答解説

1. $\triangle ABC$ の面積を求めよ。(S級 50 秒, A級 1 分 30 秒, B級 3 分, C級 5 分)

★ 三角形の面積

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2}$$

$$(1) \begin{cases} AB = 2 \\ AC = 3 \\ \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2^2 \times 3^2 - 4^2} \\ &= \frac{1}{2} \times \sqrt{36 - 16} \\ &= \sqrt{5} \quad \dots \text{答え} \end{aligned}$$

$$(2) \begin{cases} BC = \sqrt{3} \\ CA = \sqrt{5} \\ \vec{BC} \cdot \vec{CA} = -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \star (-\vec{a}) \cdot \vec{b} &= -(\vec{a} \cdot \vec{b}) \\ \vec{CA} \cdot \vec{CB} &= \vec{CB} \cdot \vec{CA} \\ &= (-\vec{BC}) \cdot \vec{CA} \\ &= -(\vec{BC} \cdot \vec{CA}) \\ &= -(-\sqrt{2}) = +\sqrt{2} \end{aligned}$$

この結果は面積には関係ないが (2 乗するから結果は等しい), 注意することを覚えておくべき.

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{CA}|^2 |\vec{CB}|^2 - (\vec{CA} \cdot \vec{CB})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\sqrt{3}^2 \times \sqrt{5}^2 - (+\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{\sqrt{13}}{2} \quad \dots \text{答え} \end{aligned}$$

$$(3) \begin{cases} AB = 3t \\ BC = t \\ \vec{BC} \cdot \vec{BA} = -\sqrt{5}t^2 \end{cases} \quad (t \text{ は正の実数})$$

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{BC}|^2 |\vec{BA}|^2 - (\vec{BC} \cdot \vec{BA})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(3t)^2 \times t^2 - (-\sqrt{5}t^2)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{9t^2 \times t^2 - 5t^4} \\ &= \frac{\sqrt{4t^4}}{2} = \frac{2|t^2|}{2} = |t^2| \end{aligned}$$

t は実数だから, $t^2 \geq 0$

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= |t^2| \\ &= t^2 \quad \dots \text{答え} \end{aligned}$$

2. $\triangle ABC$ の面積を求めよ。(S 級 50 秒, A 級 1 分 30 秒, B 級 3 分, C 級 5 分)

$$(1) \begin{cases} AB = 4 \\ AC = 2 \\ \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{4^2 \times 2^2 - (4\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{1}{2} \times \sqrt{64 - 48} \\ &= 2 \quad \dots \text{答え} \end{aligned}$$

$$(2) \begin{cases} AB = 2 \\ BC = \sqrt{5} \\ \vec{AB} \cdot \vec{BC} = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \star (-\vec{a}) \cdot \vec{b} &= -(\vec{a} \cdot \vec{b}) \\ \vec{BC} \cdot \vec{BA} &= \vec{BC} \cdot (-\vec{AB}) \\ &= -(\vec{BC} \cdot \vec{AB}) \\ &= -(\vec{AB} \cdot \vec{BC}) \\ &= -\sqrt{2} \end{aligned}$$

この結果は面積には関係ないが (2 乗するから結果は等しい), 注意することを覚えておくべき.

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{BC}|^2 |\vec{BA}|^2 - (\vec{BC} \cdot \vec{BA})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{BC^2 \times AB^2 - (\vec{BC} \cdot \vec{BA})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2^2 \times \sqrt{5}^2 - (-\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \dots \text{答え} \end{aligned}$$

$$(3) \begin{cases} BC = 5t \\ CA = 2t \\ \vec{CA} \cdot \vec{CB} = -6t^2 \end{cases} \quad (t \text{ は正の実数})$$

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{CA}|^2 |\vec{CB}|^2 - (\vec{CA} \cdot \vec{CB})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(5t)^2 \times (2t)^2 - (-6t^2)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{100t^4 - 36t^4} \\ &= \frac{\sqrt{64t^4}}{2} = \frac{8|t^2|}{2} = 4|t^2| \end{aligned}$$

t は実数だから, $t^2 \geq 0$

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= 4|t^2| \\ &= 4t^2 \quad \dots \text{答え} \end{aligned}$$