

## 反射テスト ベクトル 内積を逆算で求める 01

1. 次の条件から、内積  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  の値を求めよ。(S級1分30秒, A級2分10秒, B級3分30秒, C級5分)

$$(1) \quad \begin{cases} |\vec{a}| = 5 \\ |\vec{b}| = 3 \\ |\vec{a} + \vec{b}| = 4 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} |\vec{a}| = 4 \\ |\vec{b}| = 6 \\ |\vec{a} - \vec{b}| = 5 \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} |\vec{a}| = 4 \\ |\vec{b}| = 3 \\ |2\vec{a} + \vec{b}| = 10 \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} |\vec{a}| = \sqrt{3} \\ |\vec{b}| = \sqrt{7} \\ |4\vec{a} - 3\vec{b}| = 3\sqrt{3} \end{cases}$$

2. 次の条件から、内積  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  の値を求めよ。(S級1分30秒, A級2分10秒, B級3分30秒, C級5分)

$$(1) \quad \begin{cases} |\vec{a}| = 4 \\ |\vec{b}| = 4 \\ |\vec{a} + \vec{b}| = 2 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} |\vec{a}| = 3 \\ |\vec{b}| = 7 \\ |\vec{a} - \vec{b}| = 9 \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} |\vec{a}| = 5 \\ |\vec{b}| = 2 \\ |\vec{a} + 3\vec{b}| = 8 \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} |\vec{a}| = \sqrt{5} \\ |\vec{b}| = 3 \\ |5\vec{a} - 2\vec{b}| = 16 \end{cases}$$

# 反射テスト ベクトル 内積を逆算で求める 01 解答解説

1. 次の条件から、内積  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  の値を求めよ。(S級1分30秒, A級2分10秒, B級3分30秒, C級5分)

## ★ベクトルの乗法公式

$$|s\vec{a} \pm t\vec{b}|^2 = s^2|\vec{a}|^2 \pm 2st\vec{a} \cdot \vec{b} + t^2|\vec{b}|^2$$

$$(1) \quad \begin{cases} |\vec{a}| = 5 \\ |\vec{b}| = 3 \\ |\vec{a} + \vec{b}| = 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ \Leftrightarrow 4^2 &= 5^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 3^2 \\ \Leftrightarrow 16 &= 34 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} \\ \Leftrightarrow 2\vec{a} \cdot \vec{b} &= -18 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = -9 \quad \dots\text{答え}$$

☆内積だから負もありうる。

$$(2) \quad \begin{cases} |\vec{a}| = 4 \\ |\vec{b}| = 6 \\ |\vec{a} - \vec{b}| = 5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ \Leftrightarrow 5^2 &= 4^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 6^2 \\ \Leftrightarrow 25 &= 52 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \\ \Leftrightarrow 2\vec{a} \cdot \vec{b} &= 27 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{27}{2} \quad \dots\text{答え}$$

$$(3) \quad \begin{cases} |\vec{a}| = 4 \\ |\vec{b}| = 3 \\ |2\vec{a} + \vec{b}| = 10 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |2\vec{a} + \vec{b}|^2 &= 4|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ \Leftrightarrow 10^2 &= 4 \times 4^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 3^2 \\ \Leftrightarrow 100 &= 73 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} \\ \Leftrightarrow 4\vec{a} \cdot \vec{b} &= 27 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{27}{4} \quad \dots\text{答え}$$

$$(4) \quad \begin{cases} |\vec{a}| = \sqrt{3} \\ |\vec{b}| = \sqrt{7} \\ |4\vec{a} - 3\vec{b}| = 3\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |4\vec{a} - 3\vec{b}|^2 &= 16|\vec{a}|^2 - 24\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2 \\ \Leftrightarrow (3\sqrt{3})^2 &= 16 \times \sqrt{3}^2 - 24\vec{a} \cdot \vec{b} + 9 \times \sqrt{7}^2 \\ \Leftrightarrow 27 &= 48 - 24\vec{a} \cdot \vec{b} + 63 \\ \Leftrightarrow 24\vec{a} \cdot \vec{b} &= 84 \\ \Leftrightarrow 2\vec{a} \cdot \vec{b} &= 7 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{7}{2} \quad \dots\text{答え}$$

2. 次の条件から、内積  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  の値を求めよ。(S級1分30秒, A級2分10秒, B級3分30秒, C級5分)

$$(1) \quad \begin{cases} |\vec{a}| = 4 \\ |\vec{b}| = 4 \\ |\vec{a} + \vec{b}| = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ \Leftrightarrow 2^2 &= 4^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 4^2 \\ \Leftrightarrow 4 &= 32 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} \\ \Leftrightarrow 2\vec{a} \cdot \vec{b} &= -28 \\ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} &= -14 \quad \dots\text{答え} \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{cases} |\vec{a}| = 3 \\ |\vec{b}| = 7 \\ |\vec{a} - \vec{b}| = 9 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ \Leftrightarrow 9^2 &= 3^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 7^2 \\ \Leftrightarrow 81 &= 58 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \\ \Leftrightarrow 2\vec{a} \cdot \vec{b} &= -23 \\ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} &= -\frac{23}{2} \quad \dots\text{答え} \end{aligned}$$

$$(3) \quad \begin{cases} |\vec{a}| = 5 \\ |\vec{b}| = 2 \\ |\vec{a} + 3\vec{b}| = 8 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |\vec{a} + 3\vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2 \\ \Leftrightarrow 8^2 &= 5^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 9 \times 2^2 \\ \Leftrightarrow 64 &= 61 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} \\ \Leftrightarrow 6\vec{a} \cdot \vec{b} &= 3 \\ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} &= \frac{1}{2} \quad \dots\text{答え} \end{aligned}$$

$$(4) \quad \begin{cases} |\vec{a}| = \sqrt{5} \\ |\vec{b}| = 3 \\ |5\vec{a} - 2\vec{b}| = 16 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |5\vec{a} - 2\vec{b}|^2 &= 25|\vec{a}|^2 - 20\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 \\ \Leftrightarrow 16^2 &= 25 \times \sqrt{5}^2 - 20\vec{a} \cdot \vec{b} + 4 \times 3^2 \\ \Leftrightarrow 256 &= 125 - 20\vec{a} \cdot \vec{b} + 36 \\ \Leftrightarrow 20\vec{a} \cdot \vec{b} &= -95 \\ \Leftrightarrow 4\vec{a} \cdot \vec{b} &= -19 \\ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} &= -\frac{19}{4} \quad \dots\text{答え} \end{aligned}$$