

反射テスト ベクトル ベクトルの計算と代入 01

1. 次の値を求めよ。(S級1分20秒, A級2分, B級3分, C級4分)

$$(1) \quad \begin{cases} |\vec{a}| = 6 \\ |\vec{b}| = 2 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \end{cases} \quad \text{のとき, } |\vec{a} + \vec{b}|$$

$$(2) \quad \begin{cases} |\vec{a}| = 1 \\ |\vec{b}| = \sqrt{2} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{のとき, } |\vec{a} - \vec{b}|$$

$$(3) \quad \begin{cases} |\vec{a}| = \sqrt{6} \\ |\vec{b}| = \sqrt{5} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \end{cases} \quad \text{のとき, } |2\vec{a} - 3\vec{b}|$$

$$(4) \quad \begin{cases} |\vec{a}| = t \\ |\vec{b}| = 2t \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\sqrt{7}}{2}t^2 \end{cases} \quad \text{のとき, } |2\vec{a} - \vec{b}|$$

ただし, t は正の実数とする.

2. 次の値を求めよ。(S級1分20秒, A級2分, B級3分, C級4分)

$$(1) \quad \begin{cases} |\vec{a}| = 5 \\ |\vec{b}| = 1 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = -3 \end{cases} \quad \text{のとき, } |\vec{a} + \vec{b}|$$

$$(2) \quad \begin{cases} |\vec{a}| = \sqrt{2} \\ |\vec{b}| = \sqrt{3} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{のとき, } |\vec{a} - \vec{b}|$$

$$(3) \quad \begin{cases} |\vec{a}| = 1 \\ |\vec{b}| = \sqrt{3} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = -1 \end{cases} \quad \text{のとき, } |2\vec{a} - 5\vec{b}|$$

$$(4) \quad \begin{cases} |\vec{a}| = \sqrt{3}t \\ |\vec{b}| = t \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = -\sqrt{3}t^2 \end{cases} \quad \text{のとき, } |\vec{a} - 3\vec{b}|$$

ただし, t は正の実数とする.

反射テスト ベクトル ベクトルの計算と代入 01 解答解説

1. 次の値を求めよ。(S級1分20秒, A級2分, B級3分, C級4分)

★ベクトルの乗法公式

$$|s\vec{a} \pm t\vec{b}|^2 = s^2|\vec{a}|^2 \pm 2st\vec{a}\cdot\vec{b} + t^2|\vec{b}|^2$$

$$(1) \quad \begin{cases} |\vec{a}| = 6 \\ |\vec{b}| = 2 \\ \vec{a}\cdot\vec{b} = 4 \end{cases} \quad \text{のとき, } |\vec{a} + \vec{b}|$$

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 6^2 + 2 \times 4 + 2^2 \\ &= 48 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore |\vec{a} + \vec{b}| &= \sqrt{48} \\ &= 4\sqrt{3} \quad \dots\text{答え} \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{cases} |\vec{a}| = 1 \\ |\vec{b}| = \sqrt{2} \\ \vec{a}\cdot\vec{b} = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{のとき, } |\vec{a} - \vec{b}|$$

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 1^2 - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \sqrt{2}^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore |\vec{a} - \vec{b}| &= \sqrt{4} \\ &= 2 \quad \dots\text{答え} \end{aligned}$$

$$(3) \quad \begin{cases} |\vec{a}| = \sqrt{6} \\ |\vec{b}| = \sqrt{5} \\ \vec{a}\cdot\vec{b} = 2 \end{cases} \quad \text{のとき, } |2\vec{a} - 3\vec{b}|$$

$$\begin{aligned} |2\vec{a} - 3\vec{b}|^2 &= 4|\vec{a}|^2 - 12\vec{a}\cdot\vec{b} + 9|\vec{b}|^2 \\ &= 4 \times \sqrt{6}^2 - 12 \times 2 + 9 \times \sqrt{5}^2 \\ &= 24 - 24 + 45 \\ &= 45 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore |2\vec{a} - 3\vec{b}| &= \sqrt{45} \\ &= 3\sqrt{5} \quad \dots\text{答え} \end{aligned}$$

$$(4) \quad \begin{cases} |\vec{a}| = t \\ |\vec{b}| = 2t \\ \vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{\sqrt{7}}{2}t^2 \end{cases} \quad \text{のとき, } |2\vec{a} - \vec{b}|$$

ただし, t は正の実数とする.

$$\begin{aligned} |2\vec{a} - \vec{b}|^2 &= 4|\vec{a}|^2 - 4\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 4 \times t^2 - 4 \times \frac{\sqrt{7}}{2}t^2 + (2t)^2 \\ &= (8 - 2\sqrt{7})t^2 \end{aligned}$$

$$t > 0 \text{ より, } \sqrt{t^2} = |t| = t$$

$$\begin{aligned} \therefore |2\vec{a} - \vec{b}| &= \sqrt{(8 - 2\sqrt{7})t^2} \\ &= (\sqrt{7} - 1)t \quad \dots\text{答え} \end{aligned}$$

☆最後は二重根号を外した.

$$\begin{aligned} 8 - 2\sqrt{7} &= (7 + 1) - 2 \times \sqrt{7} \times \sqrt{1} \\ &= \sqrt{7}^2 - 2 \times \sqrt{7} \times 1 + 1^2 \\ &= (\sqrt{7} - 1)^2 \end{aligned}$$

2. 次の値を求めよ。(S級1分20秒, A級2分, B級3分, C級4分)

$$(1) \quad \begin{cases} |\vec{a}| = 5 \\ |\vec{b}| = 1 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = -3 \end{cases} \quad \text{のとき, } |\vec{a} + \vec{b}|$$

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 5^2 + 2 \times (-3) + 1^2 \\ &= 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore |\vec{a} + \vec{b}| &= \sqrt{20} \\ &= 2\sqrt{5} \quad \dots \text{答え} \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{cases} |\vec{a}| = \sqrt{2} \\ |\vec{b}| = \sqrt{3} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{のとき, } |\vec{a} - \vec{b}|$$

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= \sqrt{2}^2 - 2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) + \sqrt{3}^2 \\ &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore |\vec{a} - \vec{b}| &= \sqrt{8} \\ &= 2\sqrt{2} \quad \dots \text{答え} \end{aligned}$$

$$(3) \quad \begin{cases} |\vec{a}| = 1 \\ |\vec{b}| = \sqrt{3} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = -1 \end{cases} \quad \text{のとき, } |2\vec{a} - 5\vec{b}|$$

$$\begin{aligned} |2\vec{a} - 5\vec{b}|^2 &= 4|\vec{a}|^2 - 20\vec{a} \cdot \vec{b} + 25|\vec{b}|^2 \\ &= 4 \times 1^2 - 20 \times (-1) + 25 \times \sqrt{3}^2 \\ &= 4 + 20 + 75 \\ &= 99 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore |2\vec{a} - 5\vec{b}| &= \sqrt{99} \\ &= 3\sqrt{11} \quad \dots \text{答え} \end{aligned}$$

$$(4) \quad \begin{cases} |\vec{a}| = \sqrt{3}t \\ |\vec{b}| = t \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = -\sqrt{3}t^2 \end{cases} \quad \text{のとき, } |\vec{a} - 3\vec{b}|$$

ただし, t は正の実数とする.

$$\begin{aligned} |\vec{a} - 3\vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2 \\ &= (\sqrt{3}t)^2 - 6 \times (-\sqrt{3}t^2) + 9 \times t^2 \\ &= (12 + 6\sqrt{3})t^2 \end{aligned}$$

$$t > 0 \text{ より, } \sqrt{t^2} = |t| = t$$

$$\begin{aligned} \therefore |\vec{a} - 3\vec{b}| &= \sqrt{(12 + 6\sqrt{3})t^2} \\ &= \sqrt{12 + 2\sqrt{27}}t \\ &= (\sqrt{9} + \sqrt{3})t \\ &= (3 + \sqrt{3})t \quad \dots \text{答え} \end{aligned}$$

☆最後は二重根号を外した.

$$\begin{aligned} 12 - 2\sqrt{27} &= (9 + 3) + 2 \times \sqrt{9} \times \sqrt{3} \\ &= \sqrt{9}^2 + 2 \times \sqrt{9} \times \sqrt{3} + \sqrt{3}^2 \\ &= (\sqrt{9} + \sqrt{3})^2 \end{aligned}$$