

反射テスト ベクトル 成分表示 単位ベクトル 01

1. 次の \vec{a} と平行な単位ベクトルを求めよ。(S級 15秒, A級 1分, B級 2分, C級 3分)

(1) $\vec{a} = (3, 4)$

(2) $\vec{a} = (1, -2)$

2. 次の \vec{a} と垂直な単位ベクトルを求めよ。(S級 25秒, A級 1分40秒, B級 3分, C級 5分)

(1) $\vec{a} = (1, -3)$

(2) $\vec{a} = (24, 10)$

3. 次の \vec{a} と平行な単位ベクトルを求めよ。(S級 15 秒, A級 1 分, B級 2 分, C級 3 分)

(1) $\vec{a} = (8, -15)$

(2) $\vec{a} = (-1, 1)$

4. 次の \vec{a} と垂直な単位ベクトルを求めよ。(S級 25 秒, A級 1 分 40 秒, B級 3 分, C級 5 分)

(1) $\vec{a} = (4, 1)$

(2) $\vec{a} = (72, -21)$

反射テスト ベクトル 成分表示 単位ベクトル 01 解答解説

1. 次の \vec{a} と平行な単位ベクトルを求めよ。(S級 15秒, A級 1分, B級 2分, C級 3分)

★ベクトルの平行

\vec{a} と \vec{b} が平行 \Leftrightarrow ある実数 t に対して, $\vec{a} = t\vec{b}$ (ただし $t \neq 0$)

★単位ベクトル

長さが1のベクトルを単位ベクトルという。

(1) $\vec{a} = (3, 4)$

求める単位ベクトルを \vec{e} とすると,
 $\vec{e} \parallel \vec{a} \Leftrightarrow \vec{e} = t\vec{a}$ (t は0でない実数)
 $\therefore \vec{e} = t(3, 4) = (3t, 4t)$

\vec{e} は単位ベクトル $\Leftrightarrow |\vec{e}| = 1$
 $\therefore \sqrt{(3t)^2 + (4t)^2} = 1$
 $\Leftrightarrow 5|t| = 1 \Leftrightarrow t = \pm \frac{1}{5}$
 $\vec{e} = \pm \frac{1}{5}(3, 4)$ …答え
 $\vec{e} = \left(\pm \frac{3}{5}, \pm \frac{4}{5}\right)$ 複号同順 …別解

☆ 3:4:5 の直角三角形をイメージできると早い。

(2) $\vec{a} = (1, -2)$

求める単位ベクトルを \vec{e} とすると,
 $\vec{e} \parallel \vec{a} \Leftrightarrow \vec{e} = t\vec{a}$ (t は0でない実数)
 $\therefore \vec{e} = t(1, -2) = (t, -2t)$

\vec{e} は単位ベクトル $\Leftrightarrow |\vec{e}| = 1$
 $\therefore \sqrt{t^2 + (-2t)^2} = 1$
 $\Leftrightarrow \sqrt{5}|t| = 1 \Leftrightarrow t = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$
 $\vec{e} = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2)$ …答え
 $\vec{e} = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{5}}, \mp \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ 複号同順 …別解

☆ 1:2: $\sqrt{5}$ の直角三角形をイメージできると早い。

2. 次の \vec{a} と垂直な単位ベクトルを求めよ。(S級 25秒, A級 1分40秒, B級 3分, C級 5分)

★ベクトルの垂直

\vec{a} と \vec{b} が垂直 $\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

★単位ベクトル

長さが1のベクトルを単位ベクトルという。

(1) $\vec{a} = (1, -3)$

求める単位ベクトルを $\vec{e} = (s, t)$ とおくと,
 $\vec{e} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \vec{e} \cdot \vec{a} = 0$
 $\therefore (s, t) \cdot (1, -3) = 0 \Leftrightarrow s - 3t = 0$ …①

\vec{e} は単位ベクトル $\Leftrightarrow |\vec{e}| = 1$
 $\therefore \sqrt{s^2 + t^2} = 1 \Leftrightarrow s^2 + t^2 = 1$ …②

① $\Leftrightarrow s = 3t$
 ②に代入して, $10t^2 = 1 \Leftrightarrow t = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}$
 $\therefore \vec{e} = (s, t) = \left(\pm \frac{3}{\sqrt{10}}, \pm \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ 複号同順 …答え

☆ 1:3: $\sqrt{10}$ の直角三角形をイメージできると早い。

(2) $\vec{a} = (24, 10)$

求める単位ベクトルを $\vec{e} = (s, t)$ とおくと,
 $\vec{e} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \vec{e} \cdot \vec{a} = 0$
 $\therefore (s, t) \cdot 2(12, 5) = 0 \Leftrightarrow 2(12s + 5t) = 0$ …①

\vec{e} は単位ベクトル $\Leftrightarrow |\vec{e}| = 1$
 $\therefore \sqrt{s^2 + t^2} = 1 \Leftrightarrow s^2 + t^2 = 1$ …②

① $\Leftrightarrow t = -\frac{12}{5}s$
 ②に代入して, $s^2 + \left(-\frac{12}{5}s\right)^2 = 1 \Leftrightarrow s = \pm \frac{5}{13}$
 $\therefore \vec{e} = (s, t) = \left(\pm \frac{5}{13}, \mp \frac{12}{13}\right)$ 複号同順 …答え

☆ 5:12:13 の直角三角形をイメージできると早い。

3. 次の \vec{a} と平行な単位ベクトルを求めよ。(S級 15秒, A級 1分, B級 2分, C級 3分)

(1) $\vec{a} = (8, -15)$

求める単位ベクトルを \vec{e} とすると,
 $\vec{e} \parallel \vec{a} \Leftrightarrow \vec{e} = t\vec{a}$ (t は0でない実数)
 $\therefore \vec{e} = t(8, -15) = (8t, -15t)$

\vec{e} は単位ベクトル $\Leftrightarrow |\vec{e}| = 1$
 $\therefore \sqrt{(8t)^2 + (-15t)^2} = 1$
 $\Leftrightarrow 17|t| = 1 \Leftrightarrow t = \pm \frac{1}{17}$
 $\vec{e} = \pm \frac{1}{17}(8, -15)$ …答え
 $\vec{e} = \left(\pm \frac{8}{17}, \mp \frac{15}{17}\right)$ 複号同順 …別解

☆ 8 : 15 : 17 の直角三角形をイメージできると早い。

(2) $\vec{a} = (-1, 1)$

求める単位ベクトルを \vec{e} とすると,
 $\vec{e} \parallel \vec{a} \Leftrightarrow \vec{e} = t\vec{a}$ (t は0でない実数)
 $\therefore \vec{e} = t(-1, 1) = (-t, t)$

\vec{e} は単位ベクトル $\Leftrightarrow |\vec{e}| = 1$
 $\therefore \sqrt{(-t)^2 + (t)^2} = 1$
 $\Leftrightarrow \sqrt{2}|t| = 1 \Leftrightarrow t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $\vec{e} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$ …答え
 $\vec{e} = \left(\mp \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 複号同順 …別解

☆ 1 : 1 : $\sqrt{2}$ の直角三角形をイメージできると早い。

4. 次の \vec{a} と垂直な単位ベクトルを求めよ。(S級 25秒, A級 1分40秒, B級 3分, C級 5分)

(1) $\vec{a} = (4, 1)$

求める単位ベクトルを $\vec{e} = (s, t)$ とおくと,
 $\vec{e} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \vec{e} \cdot \vec{a} = 0$
 $\therefore (s, t) \cdot (4, 1) = 0 \Leftrightarrow 4s + t = 0$ …①

\vec{e} は単位ベクトル $\Leftrightarrow |\vec{e}| = 1$
 $\therefore \sqrt{s^2 + t^2} = 1 \Leftrightarrow s^2 + t^2 = 1$ …②

① $\Leftrightarrow t = -4s$
 ②に代入して, $17s^2 = 1 \Leftrightarrow s = \pm \frac{1}{\sqrt{17}}$
 $\therefore \vec{e} = (s, t) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{17}}, \mp \frac{4}{\sqrt{17}}\right)$ 複号同順 …答え

☆ 1 : 4 : $\sqrt{17}$ の直角三角形をイメージできると早い。

(2) $\vec{a} = (72, -21)$

求める単位ベクトルを $\vec{e} = (s, t)$ とおくと,
 $\vec{e} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \vec{e} \cdot \vec{a} = 0$
 $\therefore (s, t) \cdot 3(24, -7) = 0 \Leftrightarrow 3(24s - 7t) = 0$ …①

\vec{e} は単位ベクトル $\Leftrightarrow |\vec{e}| = 1$
 $\therefore \sqrt{s^2 + t^2} = 1 \Leftrightarrow s^2 + t^2 = 1$ …②

① $\Leftrightarrow t = \frac{24}{7}s$
 ②に代入して, $s^2 + \left(\frac{24}{7}s\right)^2 = 1 \Leftrightarrow s = \pm \frac{7}{25}$
 $\therefore \vec{e} = (s, t) = \left(\pm \frac{7}{25}, \pm \frac{24}{25}\right)$ 複号同順 …答え

☆ 7 : 24 : 25 の直角三角形をイメージできると早い。