反射テスト　ベクトル　内積　基礎　01

1.　次の計算をせよ.（ S 級 25 秒, A 級 1 分, B 級 2 分, C 級 3 分 ）

(1)　$\begin{cases} \mathrm{OA} = 3 \\ \mathrm{OB} = 6 \\ \angle\mathrm{AOB} = 30^\circ \end{cases}$　のときの　$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$

(2)　$\begin{cases} \mathrm{OA} = \sqrt{2} \\ \mathrm{OB} = \sqrt{5} \\ \angle\mathrm{AOB} = 90^\circ \end{cases}$　のときの　$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$

(3)　$\begin{cases} \mathrm{OA} = \sqrt{3} \\ \mathrm{OB} = 2 \\ \angle\mathrm{AOB} = 135^\circ \end{cases}$　のときの　$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$

(4)　1 辺の長さが 6 の正三角形 ABC に対して, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$

2. 次の計算をせよ.（ S 級 25 秒, A 級 1 分, B 級 2 分, C 級 3 分 ）

(1) $\begin{cases} \mathrm{OA} = 3 \\ \mathrm{OB} = 8 \\ \angle \mathrm{AOB} = 60^\circ \end{cases}$ のときの $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$

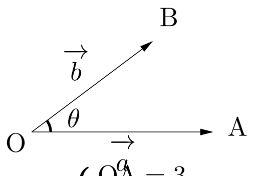
(2) $\begin{cases} \mathrm{OA} = \sqrt{2} \\ \mathrm{OB} = \sqrt{5} \\ \angle \mathrm{AOB} = 180^\circ \end{cases}$ のときの $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$

(3) $\begin{cases} \mathrm{OA} = 2\sqrt{3} \\ \mathrm{OB} = \sqrt{2} \\ \angle \mathrm{AOB} = 150^\circ \end{cases}$ のときの $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$

(4) 1 辺の長さが 4 の正八角形 ABCDEFGH に対して, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AH}}$

反射テスト　ベクトル　内積　基礎　01　解答解説

1.　次の計算をせよ.（ S 級 25 秒, A 級 1 分, B 級 2 分, C 級 3 分 ）



★ ベクトルの内積

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \mathbf{OA\ OB\ \cos\angle AOB} \\ \vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}} = \left|\vec{\boldsymbol{a}}\right|\left|\vec{\boldsymbol{b}}\right| \cos\boldsymbol{\theta} \end{cases}$$

☆上の表記はどちらも同じ意味である.

(1)　$\begin{cases} \mathrm{OA} = 3 \\ \mathrm{OB} = 6 \\ \angle\mathrm{AOB} = 30^\circ \end{cases}$　のときの　$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} &= \mathrm{OA\ OB\ \cos\angle AOB} \\ &= 3 \times 6 \times \cos 30^\circ \\ &= 3 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \mathbf{9\sqrt{3}} \quad \cdots\textbf{答え} \end{aligned}$$

(2)　$\begin{cases} \mathrm{OA} = \sqrt{2} \\ \mathrm{OB} = \sqrt{5} \\ \angle\mathrm{AOB} = 90^\circ \end{cases}$　のときの　$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} &= \mathrm{OA\ OB\ \cos\angle AOB} \\ &= \sqrt{2} \times \sqrt{5} \times \cos 90^\circ \\ &= \sqrt{2} \times \sqrt{5} \times 0 \\ &= \mathbf{0} \quad \cdots\textbf{答え} \end{aligned}$$

★ 内積 $= 0 \Leftrightarrow$ 垂直

(3)　$\begin{cases} \mathrm{OA} = \sqrt{3} \\ \mathrm{OB} = 2 \\ \angle\mathrm{AOB} = 135^\circ \end{cases}$　のときの　$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} &= \mathrm{OA\ OB\ \cos\angle AOB} \\ &= \sqrt{3} \times 2 \times \cos 135^\circ \\ &= \sqrt{3} \times 2 \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \mathbf{-\sqrt{6}} \quad \cdots\textbf{答え} \end{aligned}$$

★ 内積 $< 0 \Leftrightarrow 90^\circ < \theta \leqq 180^\circ$

(4)　1 辺の長さが 6 の正三角形 ABC に対して,
$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$

正三角形の 1 つの内角は 60° だから,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} &= \mathrm{AB\ AC\ \cos\angle CAB} \\ &= 6 \times 6 \times \cos 60^\circ \\ &= 6 \times 6 \times \frac{1}{2} \\ &= \mathbf{18} \quad \cdots\textbf{答え} \end{aligned}$$

2. 次の計算をせよ.（ S 級 25 秒, A 級 1 分, B 級 2 分, C 級 3 分 ）

(1) $\begin{cases} \mathrm{OA}=3 \\ \mathrm{OB}=8 \\ \angle\mathrm{AOB}=60^\circ \end{cases}$ のときの $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} &= \mathrm{OA}\ \mathrm{OB}\ \cos\angle\mathrm{AOB} \\ &= 3\times 8\times\cos 60^\circ \\ &= 3\times 8\times\frac{1}{2} \\ &= \mathbf{12} \quad \cdots\textbf{答え} \end{aligned}$$

(2) $\begin{cases} \mathrm{OA}=\sqrt{2} \\ \mathrm{OB}=\sqrt{5} \\ \angle\mathrm{AOB}=180^\circ \end{cases}$ のときの $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} &= \mathrm{OA}\ \mathrm{OB}\ \cos\angle\mathrm{AOB} \\ &= \sqrt{2}\times\sqrt{5}\times\cos 180^\circ \\ &= \sqrt{2}\times\sqrt{5}\times(-1) \\ &= \boldsymbol{-\sqrt{10}} \quad \cdots\textbf{答え} \end{aligned}$$

(3) $\begin{cases} \mathrm{OA}=2\sqrt{3} \\ \mathrm{OB}=\sqrt{2} \\ \angle\mathrm{AOB}=150^\circ \end{cases}$ のときの $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} &= \mathrm{OA}\ \mathrm{OB}\ \cos\angle\mathrm{AOB} \\ &= 2\sqrt{3}\times\sqrt{2}\times\cos 150^\circ \\ &= 2\sqrt{3}\times\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \boldsymbol{-3\sqrt{2}} \quad \cdots\textbf{答え} \end{aligned}$$

(4) 1 辺の長さが 4 の正八角形 ABCDEFGH に対して, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}$

正八角形の 1 つの内角は 135°だから,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}} &= \mathrm{AB}\ \mathrm{AH}\ \cos\angle\mathrm{HAB} \\ &= 4\times 4\times\cos 135^\circ \\ &= 4\times 4\times\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \boldsymbol{-8\sqrt{2}} \quad \cdots\textbf{答え} \end{aligned}$$