反射テスト　解析　軌跡　媒介変数　02

1.　点 P の描く軌跡の方程式を求めよ.（ S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 40 秒, B 級 4 分, C 級 6 分 ）

(1)　実数 $t > 0$ に対して, 点 $\mathrm{P}(t-4, t^2-1)$

(2)　実数 a, b に対して, 点 $\mathrm{P}\,(a+b, ab)$
ただし, $a^2+b^2=1$

2. 点 P の描く軌跡の方程式を求めよ.（ S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 40 秒, B 級 4 分, C 級 6 分 ）

(1) 実数 $t>0$ に対して, 点 $\mathrm{P}(1-t, 1-t^2)$

(2) 実数 a, b に対して, 点 $\mathrm{P}(a+b, ab)$
ただし, $a^2+ab+b^2=1$

反射テスト　解析　軌跡　媒介変数　02　解答解説

1.　点Pの描く軌跡の方程式を求めよ.（ S 級1分40秒, A 級2分40秒, B 級4分, C 級6分 ）

(1)　実数 $t>0$ に対して, 点 $\mathrm{P}(t-4, t^2-1)$

点Pの座標を (X, Y) とおく.

$X=t-4$　かつ　$Y=t^2-1$

$\Leftrightarrow$　$t=X+4$　かつ　$Y=t^2-1$

★ 変域の確認

$t>0 \quad \Leftrightarrow \quad X+4>0 \quad \Leftrightarrow \quad -4<X$

★ 媒介変数を消去⇒軌跡の方程式

$Y=(X+4)^2-1$

よって, 点Pの軌跡は

放物線 $\boldsymbol{y=(x+4)^2-1 \quad (-4<x)}$

(2)　実数 a, b に対して, 点 $\mathrm{P}(a+b, ab)$

ただし, $a^2+b^2=1$

点Pの座標を (X, Y) とおく.

条件から

$X=a+b$　かつ　$Y=ab$　かつ　$a^2+b^2=1$

★ 媒介変数を消去⇒軌跡の方程式

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ より

$X^2-2Y=1$

$\Leftrightarrow$　$Y=\dfrac{1}{2}X^2-\dfrac{1}{2}$　…①

★ 変域の確認

2次方程式の解と係数の関係から

a, b は t についての方程式 $t^2-Xt+Y=0$ の解

a, b は実数であるから判別式は0以上になるので,

$D=(-X)^2-4Y \geqq 0$

$\Leftrightarrow$　$X^2-4Y \geqq 0$

$\Leftrightarrow$　$X^2-4\left(\dfrac{1}{2}X^2-\dfrac{1}{2}\right) \geqq 0$　←①の代入

$\Leftrightarrow$　$X^2-2(X^2-1) \geqq 0$

$\Leftrightarrow$　$-\sqrt{2} \leqq X \leqq \sqrt{2}$

よって, 点Pの軌跡は

放物線 $\boldsymbol{y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2} \quad \left(-\sqrt{2} \leqq x \leqq \sqrt{2}\right)}$

2.　点 P の描く軌跡の方程式を求めよ.（S 級 1 分 40 秒，A 級 2 分 40 秒，B 級 4 分，C 級 6 分）

(1)　実数 $t>0$ に対して，点 $\mathrm{P}(1-t, 1-t^2)$

点 P の座標を (X, Y) とおく.

$$X=1-t \quad \text{かつ} \quad Y=1-t^2$$
$$\Leftrightarrow \quad t=1-X \quad \text{かつ} \quad Y=1-t^2$$

★ 変域の確認

$$t>0 \quad \Leftrightarrow \quad 1-X>0 \quad \Leftrightarrow \quad X<1$$

★ 媒介変数を消去⇒軌跡の方程式

$$\begin{aligned} Y &= 1-(1-X)^2 \\ &= -(X-1)^2+1 \end{aligned}$$

よって，点 P の軌跡は

放物線 $\boldsymbol{y=-(x-1)^2+1 \quad (\ x<1\ )}$

(2)　実数 a, b に対して，点 $\mathrm{P}\,(a+b, ab)$
ただし，$a^2+ab+b^2=1$

点 P の座標を (X, Y) とおく.
条件から

$$X=a+b \quad \text{かつ} \quad Y=ab \quad \text{かつ} \quad a^2+ab+b^2=1$$

★ 媒介変数を消去⇒軌跡の方程式

$a^2+ab+b^2=(a+b)^2-ab$ より

$$X^2-Y=1$$
$$\Leftrightarrow \quad Y=X^2-1 \quad \cdots①$$

★ 変域の確認

2 次方程式の解と係数の関係から
a, b は t についての方程式 $t^2-Xt+Y=0$ の解
a, b は実数であるから判別式は 0 以上になるので，

$$D=(-X)^2-4Y \geqq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad X^2-4Y \geqq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad X^2-4\left(X^2-1\right) \geqq 0 \quad \leftarrow ①\text{の代入}$$
$$\Leftrightarrow \quad -3X^2+4 \geqq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad X^2 \leqq \frac{4}{3}$$
$$\Leftrightarrow \quad -\frac{2\sqrt{3}}{3} \leqq X \leqq \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

よって，点 P の軌跡は

放物線 $\boldsymbol{y=x^2-1 \quad \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3} \leqq x \leqq \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)}$