

## 反射テスト 解析 軌跡 連動型 01

1. 点  $P$  の描く軌跡の方程式を求めよ. (  $S$  級 1 分 40 秒,  $A$  級 2 分 30 秒,  $B$  級 4 分,  $C$  級 6 分 )

- (1) 点  $A(0, 2)$ , 直線  $x + y + 2 = 0$  上の点  $Q$  に対して,      (2) 点  $A(3, 0)$ , 円  $x^2 + y^2 = 1$  上の点  $Q$  に対して,  
線分  $AQ$  を  $1 : 2$  に内分する点  $P$  の軌跡.      線分  $AQ$  の中点  $P$  の軌跡.

2. 点 P の描く軌跡の方程式を求めよ. ( S 級 2 分 20 秒, A 級 3 分 40 秒, B 級 5 分, C 級 7 分 )

(1) 点  $A(1, 3)$ , 放物線  $y = x^2$  上の点 Q に対して,  
線分 AQ の中点 P の軌跡.

(2) 点  $A(0, -2)$ , 円  $x^2 + y^2 = 1$  上の点 Q に対して,  
線分 AQ を 3 : 1 に外分する点 P の軌跡.

## 反射テスト 解析 軌跡 連動型 01 解答解説

1. 点 P の描く軌跡の方程式を求めよ. ( S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 30 秒, B 級 4 分, C 級 6 分 )

### ★ 連動型の軌跡

点 Q がある図形上を動くとき,  $Q(s, t)$ ,  $P(X, Y)$  において,  $s, t$  を消去する.

- (1) 点  $A(0, 2)$ , 直線  $x + y + 2 = 0$  上の点 Q に対して, 線分 AQ を 1 : 2 に内分する点 P の軌跡.      (2) 点  $A(3, 0)$ , 円  $x^2 + y^2 = 1$  上の点 Q に対して, 線分 AQ の中点 P の軌跡.

点  $Q(s, t)$ ,  $P(X, Y)$  とおく.

条件から,

$$s + t + 2 = 0 \text{ かつ } X = \frac{2 \times 0 + s}{3} \text{ かつ } Y = \frac{2 \times 2 + t}{3}$$

$$\Leftrightarrow s = 3X \text{ かつ } t = 3Y - 4 \text{ かつ } s + t + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3X + 3Y - 4 + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3X + 3Y - 2 = 0$$

よって, 点 P の軌跡は

$$\text{直線 } 3x + 3y - 2 = 0$$

点  $Q(s, t)$ ,  $P(X, Y)$  とおく.

条件から,

$$s^2 + t^2 = 1 \text{ かつ } X = \frac{s + 3}{2} \text{ かつ } Y = \frac{t}{2}$$

$$\Leftrightarrow s = 2X - 3 \text{ かつ } t = 2Y \text{ かつ } s^2 + t^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (2X - 3)^2 + (2Y)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 4 \left( X - \frac{3}{2} \right)^2 + 4Y^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \left( X - \frac{3}{2} \right)^2 + Y^2 = \left( \frac{1}{2} \right)^2$$

よって, 点 P の軌跡は

中心  $\left( \frac{3}{2}, 0 \right)$  半径  $\frac{1}{2}$  の円

$$\left( x - \frac{3}{2} \right)^2 + y^2 = \left( \frac{1}{2} \right)^2$$

2. 点 P の描く軌跡の方程式を求めよ. ( S 級 2 分 20 秒, A 級 3 分 40 秒, B 級 5 分, C 級 7 分 )

(1) 点 A(1, 3), 放物線  $y = x^2$  上の点 Q に対して,  
線分 AQ の中点 P の軌跡.

点 Q(s, t), P(X, Y) とおく.

条件から,

$$t = s^2 \text{ かつ } X = \frac{s+1}{2} \text{ かつ } Y = \frac{t+3}{2}$$

$$\Leftrightarrow s = 2X - 1 \text{ かつ } t = 2Y - 3 \text{ かつ } t = s^2$$

$$\Leftrightarrow 2Y - 3 = (2X - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 2Y - 3 = 4X^2 - 4X + 1$$

$$\Leftrightarrow Y = 2X^2 - 2X + 2$$

$$\Leftrightarrow Y = 2X^2 - 2X + 2$$

よって, 点 P の軌跡は

**放物線  $y = 2x^2 - 2x + 2$**

(2) 点 A(0, -2), 円  $x^2 + y^2 = 1$  上の点 Q に対して,  
線分 AQ を 3 : 1 に外分する点 P の軌跡.

点 Q(s, t), P(X, Y) とおく.

条件から,  $s^2 + t^2 = 1$

$$\text{かつ } X = \frac{-1 \times 0 + 3s}{3-1} \text{ かつ } Y = \frac{-1 \times (-2) + 3t}{3-1}$$

$$\Leftrightarrow s = \frac{2}{3}X \text{ かつ } t = \frac{2Y-2}{3} \text{ かつ } s^2 + t^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}X\right)^2 + \left(\frac{2Y-2}{3}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{9}X^2 + \frac{4}{9}(Y-1)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow X^2 + (Y-1)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

よって, 点 P の軌跡は

**中心 (0, 1) 半径  $\frac{3}{2}$  の円**

$$x^2 + (y-1)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$