反射テスト　解析　軌跡　距離　01

1.　点 P の描く軌跡の方程式を求めよ.（ S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 30 秒, B 級 4 分, C 級 6 分 ）

(1)　2 点 $\mathrm{A}(1,6)$, $\mathrm{B}(5,3)$ から等距離にある点 P.

(2)　2 点 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(6,0)$ に対して, $\mathrm{PA}=2\mathrm{PO}$ である点 P.

2. 点 P の描く軌跡の方程式を求めよ.（ S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 30 秒, B 級 4 分, C 級 6 分 ）

(1) 原点 O, A$(2,0)$ に対して,
$\mathrm{PA}^2 - \mathrm{PO}^2 = 8$ を満たす点 P.

(2) 2 点 O$(0,0)$, A$(1,0)$ に対して,
$\mathrm{PA} : \mathrm{PO} = 2 : 3$ である点 P.

反射テスト　解析　軌跡　距離　01　解答解説

1.　点 P の描く軌跡の方程式を求めよ.（ S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 30 秒, B 級 4 分, C 級 6 分 ）

★ 軌跡の求め方

① 点 P の座標を (X, Y) とおく.

② 定義域を考える.

③ 条件を立式する.

②を常に留意すること.

(1)　2 点 A$(1, 6)$, B$(5, 3)$ から等距離にある点 P.

題意から　PA $=$ PB

点 P の座標を (X, Y) とおく.

PA, PB ともに 0 以上であるから

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{PA} = \mathrm{PB} \\
\Leftrightarrow\ & \mathrm{PA}^2 = \mathrm{PB}^2 \\
\Leftrightarrow\ & (X-1)^2 + (Y-6)^2 = (X-5)^2 + (Y-3)^2 \\
\Leftrightarrow\ & X^2 - 2X + 1 + Y^2 - 12Y + 36 \\
& \quad = X^2 - 10X + 25 + Y^2 - 6Y + 9 \\
\Leftrightarrow\ & 8X - 6Y + 3 = 0
\end{aligned}
$$

よって, 点 P の軌跡は

直線 $8x - 6y + 3 = 0$

(2)　2 点 O$(0, 0)$, $A(6, 0)$ に対して,
PA $=$ 2PO である点 P.

点 P の座標を (X, Y) とおく.

PA, PO ともに 0 以上であるから

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{PA} = 2\mathrm{PO} \\
\Leftrightarrow\ & \mathrm{PA}^2 = 4\mathrm{PO}^2 \\
\Leftrightarrow\ & (X-6)^2 + Y^2 = 4\left(X^2 + Y^2\right) \\
\Leftrightarrow\ & X^2 - 12X + 36 + Y^2 = 4X^2 + 4Y^2 \\
\Leftrightarrow\ & 3X^2 + 12X - 36 + 3Y^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & X^2 + 4X - 12 + Y^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (X+2)^2 + Y^2 = 4^2
\end{aligned}
$$

よって, 点 P の軌跡は

中心 $(-2, 0)$　半径 4 の円

$(x+2)^2 + y^2 = 4^2$

2. 点 P の描く軌跡の方程式を求めよ.（ S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 30 秒, B 級 4 分, C 級 6 分 ）

(1) 原点 O, $\mathrm{A}(2,0)$ に対して,
$\mathrm{PA}^2-\mathrm{PO}^2=8$ を満たす点 P.

題意から $\mathrm{PA}=\mathrm{PB}$
点 P の座標を (X,Y) とおく.
PA,PB ともに 0 以上であるから

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{PA}^2-\mathrm{PO}^2=6 \\
\Leftrightarrow\ & \left\{(X-2)^2+Y^2\right\}-(X^2+Y^2)=8 \\
\Leftrightarrow\ & X^2-4X+4+Y^2-X^2-Y^2=8 \\
\Leftrightarrow\ & X=-1
\end{aligned}
$$

よって, 点 P の軌跡は
直線 $\boldsymbol{x=-1}$

(2) 2 点 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(1,0)$ に対して,
$\mathrm{PA}:\mathrm{PO}=2:3$ である点 P.

点 P の座標を (X,Y) とおく.
PA,PO ともに 0 以上であるから

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{PA}:\mathrm{PO}=2:3 \Leftrightarrow \quad 3\mathrm{PA}=2\mathrm{PO} \\
\Leftrightarrow\ & 9\mathrm{PA}^2=4\mathrm{PO}^2 \\
\Leftrightarrow\ & 9\left\{(X-1)^2+Y^2\right\}=4\left(X^2+Y^2\right) \\
\Leftrightarrow\ & 9X^2-18X+9+9Y^2=4X^2+4Y^2 \\
\Leftrightarrow\ & 5X^2-18X+9+5Y^2=0 \\
\Leftrightarrow\ & X^2-\frac{18}{5}+Y^2=-\frac{9}{5} \\
\Leftrightarrow\ & \left(X-\frac{9}{5}\right)^2+Y^2=-\frac{9}{5}+\tfrac{81}{25} \\
\Leftrightarrow\ & \left(X-\frac{9}{5}\right)^2+Y^2=\frac{36}{25} \\
\Leftrightarrow\ & \left(X-\frac{9}{5}\right)^2+Y^2=\left(\frac{6}{5}\right)^2
\end{aligned}
$$

よって, 点 P の軌跡は
中心 $\boldsymbol{\left(\frac{9}{5},0\right)}$ 半径 $\boldsymbol{\frac{6}{5}}$ の円

$$\boldsymbol{\left(x-\frac{9}{5}\right)^2+y^2=\left(\frac{6}{5}\right)^2}$$

★ 2 定点 A, B に対して, $\mathrm{PA}:\mathrm{PB}=m:n$ である
点 P の軌跡は

$$
\begin{cases}
m=n \text{ のとき} & \text{線分 AB の垂直二等分線} \\
m\neq n \text{ のとき} & \text{線分 AB を } m:n \text{ に内分する点と} \\
 & \text{外分する点を直径とする円}
\end{cases}
$$

となる.
$m\neq n$ のときの円を「**アポロニウスの円**」という.