反射テスト　解析　直径端点座標と円の方程式　01

1.　xy 座標平面上の原点 O と 点 A(a, b) に対して, 直径 OA をもつ円の方程式を求めよ.

（ S 級 20 秒, A 級 1 分, B 級 1 分 30 秒, C 級 2 分 ）

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2. A(a,b) , B(c,d) に対して, 直径 AB をもつ円の方程式が

$(x-a)(x-c)+(y-b)(y-d)=0$

となることを証明したい. （ S 級 1 分 50 秒, A 級 2 分 40 秒, B 級 3 分 40 秒, C 級 5 分 ）

(1) A(a,b) , B(c,d) に対して, 線分 AB の中点を M とする. M の座標を a,b,c,d で表せ.

(2) A(a,b) , B(c,d) に対して, 線分 AB の長さを a,b,c,d で表せ.

(3) 円の方程式 $(x-a)(x-c)+(y-b)(y-d)=0$ を変形して, 中心の座標と半径を求めよ.

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

反射テスト　解析　直径端点座標と円の方程式　01 解答解説

1.　xy 座標平面上の原点 O と 点 A(a, b) に対して, 直径 OA をもつ円の方程式を求めよ.

（ S 級 20 秒, A 級 1 分, B 級 1 分 30 秒, C 級 2 分 ）

円の中心は線分 OA の中点だから, 円の中心の座標は $\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{b}{2}\right)$.

半径は,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathrm{OA} &= \frac{1}{2}\sqrt{(a-0)^2+(b-0)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\end{aligned}$$

以上から, 円の方程式は,

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\quad x^2-ax+\frac{1}{4}a^2+y^2-by+\frac{1}{4}b^2=\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}b^2$$

$$\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{x(x-a)+y(y-b)=0}$$

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2. A(a,b) , B(c,d) に対して, 直径 AB をもつ円の方程式が

$(x-a)(x-c)+(y-b)(y-d)=0$

となることを証明したい. （ S 級 1 分 50 秒, A 級 2 分 40 秒, B 級 3 分 40 秒, C 級 5 分 ）

(1) A(a,b) , B(c,d) に対して, 線分 AB の中点を M とする. M の座標を a,b,c,d で表せ.

$$\boldsymbol{\left(\frac{a+c}{2},\ \frac{b+d}{2}\right)}$$

(2) A(a,b) , B(c,d) に対して, 線分 AB の長さを a,b,c,d で表せ.

$$\boldsymbol{\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}}$$

(3) 円の方程式 $(x-a)(x-c)+(y-b)(y-d)=0$ を変形して, 中心の座標と半径を求めよ.

$$(x-a)(x-c)+(y-b)(y-d)=0$$

$$\Leftrightarrow\quad x^2-(a+c)x+ac+y^2-(b+d)y+bd=0$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(x-\frac{a+c}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b+d}{2}\right)^2+ac+bd=\left(\frac{a+c}{2}\right)^2+\left(\frac{b+d}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(x-\frac{a+c}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b+d}{2}\right)^2=\left(\frac{a-c}{2}\right)^2+\left(\frac{b-d}{2}\right)^2$$

$\therefore$ 円の中心の座標 $\boldsymbol{\left(\frac{a+c}{2},\ \frac{b+d}{2}\right)}$, 円の半径 $\boldsymbol{\sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2+\left(\frac{b-d}{2}\right)^2}}$

(1) と (3) から中心の座標は一致する. また, (2) 直径 AB の半分が (3) の半径に等しいことを示す.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathrm{AB} &= \frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}\\ &= \sqrt{\frac{1}{4}\cdot\{(a-c)^2+(b-d)^2\}}\\ &= \sqrt{\frac{(a-c)^2}{4}+\frac{(b-d)^2}{4}}\\ &= \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2+\left(\frac{b-d}{2}\right)^2}\end{aligned}$$

以上から, 次の定理が成り立つ.

★ 直径端点の座標と円の方程式

直径の端点の座標が (a,b) , (c,d) である円の方程式は, 次のように表せる.

$$\boldsymbol{(x-a)(x-c)+(y-b)(y-d)=0}$$

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）