

反射テスト 解析 円と直線の方程式を 1 つの式で表す 01

1. 次の 2 円について, 次の問に答えよ. (*S* 級 1 分 30 秒, *A* 級 2 分, *B* 級 3 分, *C* 級 4 分)

円 *P*: $x^2 + y^2 = 4$ 円 *Q*: $x^2 - 8x + y^2 = -7$

- (1) 2 円の共有点を通る直線の方程式を求めよ.

- (2) 2 円の共有点を通して, 原点も通る円の方程式を求めよ.

2. 次の2円について, 次の問に答えよ. (S 級 1 分 35 秒, A 級 2 分, B 級 3 分, C 級 4 分)

円 P: $x^2 + y^2 = 2$ 円 Q: $x^2 + 4x + y^2 - 4y = 2$

(1) 2 円の共有点を通る直線の方程式を求めよ.

(2) 2 円の共有点を通して, $(-1, 0)$ も通る円の方程式を求めよ.

反射テスト 解析 円と直線の方程式を1つの式で表す 01 解答解説

1. 次の2円について、次の間に答えよ。(S級1分30秒, A級2分, B級3分, C級4分)

円P: $x^2 + y^2 = 4$ 円Q: $x^2 - 8x + y^2 = -7$

★2円の共有点を通る円または直線の方程式

2円の方程式が与えられたとき、その方程式を変形して 右辺 = 0 の形にしたものを、それぞれ $P(x) = 0$, $Q(x) = 0$ とする。
ある実数 k を用いて表される $P(x) + k \cdot Q(x) = 0$ という方程式は、2円の共有点を通る円、もしくは直線になる。
 k によって2次の項が消去されれば直線となり、それ以外のときは円になる。

- (1) 2円の共有点を通る直線の方程式を求めよ。

2円の方程式を変形して、

円P: $x^2 + y^2 - 4 = 0$ 円Q: $x^2 - 8x + y^2 + 7 = 0$

とすれば、2円の共有点を通る図形の方程式は、

$x^2 - 8x + y^2 + 7 + k(x^2 + y^2 - 4) = 0$ と表せる。

この方程式が直線を表すのは、2次の係数が0になるときだから、 $k = -1$

よって、 $k = -1$ を代入して、整理すれば、

$$-8x + 7 + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8x - 11 = 0$$

☆簡単な式の方を k 倍する方がいいだろう。

- (2) 2円の共有点を通して、原点も通る円の方程式を求めよ。

2円の方程式を変形して、

円P: $x^2 + y^2 - 4 = 0$ 円Q: $x^2 - 8x + y^2 + 7 = 0$

とすれば、2円の共有点を通る図形の方程式は、

$x^2 - 8x + y^2 + 7 + k(x^2 + y^2 - 4) = 0$ と表せる。

この方程式が原点を通るには $(0, 0)$ を代入して、成立すればよいから、

$$7 + k \cdot (-4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{7}{4}$$

これを代入して、

$$x^2 - 8x + y^2 + 7 + \frac{7}{4}(x^2 + y^2 - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{11}{4}x^2 - 8x + \frac{11}{4}y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{32}{11}x + y^2 = 0$$

2. 次の2円について、次の間に答えよ。(S級1分35秒, A級2分, B級3分, C級4分)

円P: $x^2 + y^2 = 2$ 円Q: $x^2 + 4x + y^2 - 4y = 2$

★2円の共有点を通る円または直線の方程式

2円の方程式が与えられたとき、その方程式を変形して 右辺 = 0 の形にしたものを、それぞれ $P(x) = 0$, $Q(x) = 0$ とする。
ある実数 k を用いて表される $P(x) + k \cdot Q(x) = 0$ という方程式は、2円の共有点を通る円、もしくは直線になる。
 k によって2次の項が消去されれば直線となり、それ以外のときは円になる。

- (1) 2円の共有点を通る直線の方程式を求めよ。

2円の方程式を変形して、

円P: $x^2 + y^2 - 2 = 0$ 円Q: $x^2 + 4x + y^2 - 4y - 2 = 0$

とすれば、2円の共有点を通る図形の方程式は、

$x^2 + 4x + y^2 - 4y - 2 + k(x^2 + y^2 - 2) = 0$ と表せる。

この方程式が直線を表すのは、2次の係数が0になるときだから、 $k = -1$
よって、 $k = -1$ を代入して、整理すれば、

$$+4x - 4y - 2 + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - y = 0$$

- (2) 2円の共有点を通して、 $(-1, 0)$ も通る円の方程式を求めよ。

2円の方程式を変形して、

円P: $x^2 + y^2 - 2 = 0$ 円Q: $x^2 + 4x + y^2 - 4y - 2 = 0$

とすれば、2円の共有点を通る図形の方程式は、

$x^2 + 4x + y^2 - 4y - 2 + k(x^2 + y^2 - 2) = 0$ と表せる。

この方程式が $(-1, 0)$ を通るから、

$$(-1)^2 + 4 \cdot (-1) - 2 + k \{ (-1)^2 - 2 \} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = -5$$

これを代入して、

$$x^2 + 4x + y^2 - 4y - 2 - 5(x^2 + y^2 - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow -4x^2 + 4x - 4y^2 - 4y + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + y^2 + y - 2 = 0$$