

反射テスト 指数対数 置き換え 01

1. 次の問に答えよ. (S 級 1 分 45 秒, A 級 3 分 30 秒, B 級 6 分, C 級 9 分)

(1) $y = 2^x - 4^x$ の最大値を求めよ.

(2) $y = (\log_2 x)^2 + \log_2 \frac{x^2}{8}$ の最小値を求めよ.

2. 次の問に答えよ. (S 級 2 分 10 秒, A 級 4 分, B 級 6 分 40 秒, C 級 10 分)

(1) $y = 2^x - 4^{x-1}$ の最大値を求めよ.

(2) $y = (\log_2 x)^2 + \log_2 (9x)$ の最小値を求めよ.

反射テスト 指数対数 置き換え 01 解答解説

1. 次の問に答えよ。(S級1分45秒, A級3分30秒, B級6分, C級9分)

★指数関数の置き換え

計算式でも方程式でも $t = a^x$ と置き換えて考えると簡便になることは多い. 重要テクニックである.
その際, 定義域が $t > 0$ となることに注意しよう.

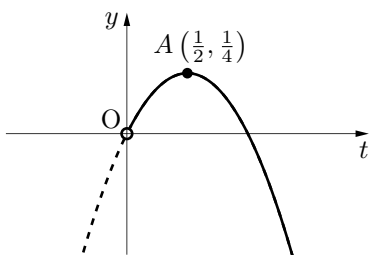
★対数関数の置き換え

計算式でも方程式でも $t = \log_a x$ と置き換えて考えると簡便になることは多い.
その際, $x > 0$ であり, t は実数全体をとることに注意しよう.

(1) $y = 2^x - 4^x$ の最大値を求めよ.

$t = 2^x$ とおくと, $t > 0$

$4^x = 2^{2x} = (2^x)^2 = t^2$ であるから, $y = t - t^2$ ($t > 0$)



$$y = -(t^2 - t) = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

左図から $t > 0$ のとき, 点 A が y の最大値

$$t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -1$$

$\therefore x = -1$ のとき 最大値 $y = \frac{1}{4}$ をとる.

(2) $y = (\log_2 x)^2 + \log_2 \frac{x^2}{8}$ の最小値を求めよ.

★真数条件より $x > 0$ かつ $\frac{x^2}{8} > 0 \Leftrightarrow x > 0$

このとき, $t = \log_2 x$ とおくと, t は任意の実数である.

$$\begin{aligned} y &= (\log_2 x)^2 + \log_2 x^2 - \log_2 8 \\ &= (\log_2 x)^2 + 2 \log_2 x - \log_2 2^3 \\ &= t^2 + 2t - 3 \\ &= (t + 1)^2 - 4 \end{aligned}$$

よって, $t = -1$ のとき, 最小値 -4 をとる.

$$t = -1 \Leftrightarrow \log_2 x = -1 \Leftrightarrow \log_2 x = -\log_2 2 \Leftrightarrow x = 2^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

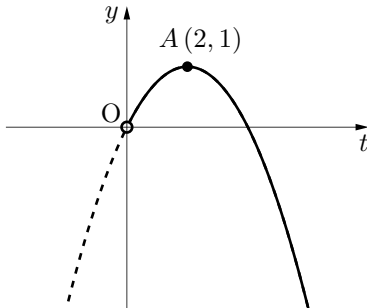
$\therefore x = \frac{1}{2}$ のとき 最小値 $y = -4$ をとる.

2. 次の問に答えよ。(S級2分10秒, A級4分, B級6分40秒, C級10分)

(1) $y = 2^x - 4^{x-1}$ の最大値を求めよ.

$t = 2^x$ とおくと, $t > 0$

$$4^{x-1} = 4^x \cdot 4^{-1} = \frac{1}{4} \cdot 4^x = \frac{1}{4} \cdot 2^{2x} = \frac{1}{4} t^2 \text{ であるから, } y = t - \frac{1}{4} t^2 \quad (t > 0)$$



$$y = -\frac{1}{4} (t^2 - 4t) = -\frac{1}{4} (t - 2)^2 + 1$$

左図から $t > 0$ のとき, 点 A が y の最大値

$$t = 2 \Leftrightarrow 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$$

$\therefore x = 1$ のとき 最大値 $y = 1$ をとる.

(2) $y = (\log_2 x)^2 + \log_2 (9x)$ の最小値を求めよ.

★真数条件より $x > 0$ かつ $9x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

このとき, $t = \log_2 x$ とおくと, t は任意の実数である.

$$y = (\log_2 x)^2 + \log_2 x + \log_2 9$$

$$= (\log_2 x)^2 + \log_2 x + \log_2 3^2$$

$$= t^2 + t + 2 \log_2 3$$

$$= \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 2 \log_2 3$$

よって, $t = -\frac{1}{2}$ のとき, 最小値 $-\frac{1}{4} + 2 \log_2 3$ をとる.

$$t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_2 x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_2 x = -\frac{1}{2} \log_2 2 \Leftrightarrow x = 2^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\therefore x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき 最小値 $y = -\frac{1}{4} + 2 \log_2 3$ をとる.