反射テスト　対数　連立方程式　02

1.　次の連立方程式を実数 x, y について解け．ただし，答えは底を $\mathbf{6}$ とする対数の形で答えよ．

（ S 級 2 分 20 秒，A 級 3 分 20 秒，B 級 5 分 30 秒，C 級 8 分 ）

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 1 \\ 3^{x+1} \cdot 2^y = 2 \end{cases}$$

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2. 次の連立方程式を実数 x, y について解け．ただし，答えは底を **10** とする対数の形で答えよ．

（ S 級 3 分，A 級 4 分 20 秒，B 級 7 分 30 秒，C 級 10 分 ）

$$\begin{cases} 2^x \cdot 5^y = 1 \\ 5^{x+2} \cdot 2^y = 4 \end{cases}$$

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

反射テスト　対数　連立方程式　02　解答解説

1.　次の連立方程式を実数 x, y について解け．ただし，答えは底を **6** とする対数の形で答えよ．
（S 級 2 分 20 秒，A 級 3 分 20 秒，B 級 5 分 30 秒，C 級 8 分）

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 1 & \cdots① \\ 3^{x+1} \cdot 2^y = 2 & \cdots② \end{cases}$$

★ 指数に変数がある場合，両辺の対数をとって考えるのが基本．

① $\Leftrightarrow\ \log_2(2^x \cdot 3^y) = \log_2 1$
　$\Leftrightarrow\ \log_2 2^x + \log_2 3^y = 0$
　$\Leftrightarrow\ x + y\log_2 3 = 0$
　$\Leftrightarrow\ x = -y\log_2 3 \quad \cdots③$

② $\Leftrightarrow\ 3 \cdot 3^x \cdot 2^y = 2$
　$\Leftrightarrow\ \log_2(3^x \cdot 2^y) = \log_2 \dfrac{2}{3}$
　$\Leftrightarrow\ x\log_2 3 + y = 1 - \log_2 3 \quad \cdots④$

③を④に代入して，
　$-y(\log_2 3)^2 + y = 1 - 1\log_2 3$　　←☆注意 $(\log_2 3)^2$ と $\log_2 3^2$ は等しくない．
$\Leftrightarrow\ \left\{1 - (\log_2 3)^2\right\} y = 1 - \log_2 3$
$\Leftrightarrow\ (1 + \log_2 3)(1 - \log_2 3)\, y = 1 - \log_2 3$
$\Leftrightarrow\ (1 + \log_2 3)\, y = 1$
$\Leftrightarrow\ y = \dfrac{1}{1 + \log_2 3}$
$\Leftrightarrow\ y = \dfrac{1}{1 + \frac{\log_6 3}{\log_6 2}}$
$\Leftrightarrow\ y = \dfrac{\log_6 2}{\log_6 2 + \log_6 3}$
$\Leftrightarrow\ y = \log_6 2$

③に代入して，

$$x = -\log_6 2 \cdot \log_2 3 = -\log_6 2 \cdot \frac{\log_6 3}{\log_6 2} = -\log_6 3$$

$$\boldsymbol{(x, y) = (-\log_6 3, \log_6 2)}$$

☆別解　底を 6 として両辺の対数をとって計算する．
① $\Leftrightarrow\ x\log_6 2 + y\log_6 3 = 0$
② $\Leftrightarrow\ x\log_6 3 + y\log_6 2 = \log_6 2 - \log_6 3$

さらに，逆行列を用いることができれば早い．

$$\therefore \begin{pmatrix} \log_6 2 & \log_6 3 \\ \log_6 3 & \log_6 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \log_6 2 - \log_6 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{(\log_6 2)^2 - (\log_6 3)^2} \begin{pmatrix} \log_6 2 & -\log_6 3 \\ -\log_6 3 & \log_6 2 \end{pmatrix} \cdot (\log_6 2 - \log_6 3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\log_6 2 - \log_6 3}{(\log_6 2 + \log_6 3)(\log_6 2 - \log_6 3)} \begin{pmatrix} -\log_6 3 \\ \log_6 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\log_6 2 + \log_6 3} \begin{pmatrix} -\log_6 3 \\ \log_6 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\log_6 6} \begin{pmatrix} -\log_6 3 \\ \log_6 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\log_6 3 \\ \log_6 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. 次の連立方程式を実数 x, y について解け．ただし，答えは底を **10** とする対数の形で答えよ．

（ S 級 3 分，A 級 4 分 20 秒，B 級 7 分 30 秒，C 級 10 分 ）

$$\begin{cases} 2^x \cdot 5^y = 1 & \cdots ① \\ 5^{x+2} \cdot 2^y = 4 & \cdots ② \end{cases}$$

★ 指数に変数がある場合，両辺の対数をとって考えるのが基本．

① $\Leftrightarrow \log_2(2^x \cdot 5^y) = \log_2 1$

$\Leftrightarrow \log_2 2^x + \log_2 5^y = 0$

$\Leftrightarrow x + y\log_2 5 = 0$

$\Leftrightarrow x = -y\log_2 5 \quad \cdots ③$

② $\Leftrightarrow 25 \cdot 5^x \cdot 2^y = 4$

$\Leftrightarrow \log_2(5^x \cdot 2^y) = \log_2 \dfrac{4}{25}$

$\Leftrightarrow x\log_2 5 + y = 2 - 2\log_2 5 \quad \cdots ④$

③を④に代入して，

$$\begin{aligned}
& -y(\log_2 5)^2 + y = 2 - 2\log_2 5 \\
\Leftrightarrow\ & \left\{1 - (\log_2 5)^2\right\} y = 2(1 - \log_2 5) \\
\Leftrightarrow\ & (1 + \log_2 5)(1 - \log_2 5)\,y = 2(1 - \log_2 5) \\
\Leftrightarrow\ & (1 + \log_2 5)\,y = 2 \\
\Leftrightarrow\ & y = \frac{2}{1 + \log_2 5} \\
\Leftrightarrow\ & y = \frac{2\log_{10} 2}{\log_{10} 2 + \log_{10} 5} \\
\Leftrightarrow\ & y = 2\log_{10} 2
\end{aligned}$$

③に代入して，

$$x = -2\log_{10} 2 \cdot \log_2 5 = -2\log_{10} 2 \cdot \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2} = -2\log_{10} 5$$

$$\boldsymbol{(x, y) = (-2\log_{10} 5, 2\log_{10} 2)}$$

☆別解　底を 10 として両辺の対数をとって計算する．

① $\Leftrightarrow$ $x\log_{10} 2 + y\log_{10} 5 = 0$

② $\Leftrightarrow$ $x\log_{10} 5 + y\log_{10} 2 = 2(\log_{10} 2 - \log_{10} 5)$

さらに，逆行列を用いることができれば早い．

$$\therefore \begin{pmatrix} \log_{10} 2 & \log_{10} 5 \\ \log_{10} 5 & \log_{10} 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2(\log_{10} 2 - \log_{10} 5) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{(\log_{10} 2)^2 - (\log_{10} 5)^2} \begin{pmatrix} \log_{10} 2 & -\log_{10} 5 \\ -\log_{10} 5 & \log_{10} 2 \end{pmatrix} \cdot 2(\log_{10} 2 - \log_{10} 5) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{2(\log_{10} 2 - \log_{10} 5)}{(\log_{10} 2 + \log_{10} 5)(\log_{10} 2 - \log_{10} 5)} \begin{pmatrix} -\log_{10} 5 \\ \log_{10} 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{2}{\log_{10} 2 + \log_{10} 5} \begin{pmatrix} -\log_{10} 5 \\ \log_{10} 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{\log_{10} 10} \begin{pmatrix} -\log_{10} 5 \\ \log_{10} 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\log_{10} 5 \\ 2\log_{10} 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）