

反射テスト 対数 連立方程式 01

1. 実数 x, y について解け. (S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 30 秒, B 級 4 分, C 級 6 分)

$$(1) \quad \begin{cases} y^3 = \frac{1}{x} \\ \log_2 x + \log_2 y = 4 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 2^x \cdot 4^y = 27 \\ 2^{x+y} = 3 \end{cases}$$

2. 実数 x, y について解け. (S 級 1 分 45 秒, A 級 2 分 40 秒, B 級 4 分, C 級 6 分)

$$(1) \quad \begin{cases} y^3 = \frac{1}{x^2} \\ \log_3 x + \log_3 y = 1 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 9^x \cdot 3^y = 6 \\ 3^{x+y} = 4 \end{cases}$$

反射テスト 対数 連立方程式 01 解答解説

1. 実数 x, y について解け. (S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 30 秒, B 級 4 分, C 級 6 分)

★ 対数の計算 (底を 1 ではない正の実数 a, b とする対数について)

$M > 0, N > 0$ で, k が実数であるとき,

- ① $\log_a 1 = 0$
- ② $\log_a a = 1$
- ③ $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
- ④ $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
- ⑤ $\log_a M^k = k \log_a M$
- ⑥ $\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$ (底の変換公式)
- ⑦ $a^{\log_a M} = M$ (両辺の対数をとれば証明できる.)

$$(1) \quad \begin{cases} y^3 = \frac{1}{x} & \cdots \textcircled{1} \\ \log_2 x + \log_2 y = 4 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 2^x \cdot 4^y = 27 & \cdots \textcircled{1} \\ 2^{x+y} = 3 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

② の真数条件から, x, y は正の実数.

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &\Leftrightarrow \log_2 y^3 = \log_2 x^{-1} \\ &\Leftrightarrow 3 \log_2 y = -\log_2 x \\ &\Leftrightarrow \log_2 x = -3 \log_2 y \quad \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

② に代入して,

$$\begin{aligned} &-3 \log_2 y + \log_2 y = 4 \\ \Leftrightarrow &-2 \log_2 y = 4 \\ \Leftrightarrow &\log_2 y = -2 \\ \Leftrightarrow &y = 2^{-2} \quad \leftarrow \star \text{対数の逆算} \\ \Leftrightarrow &y = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

① に代入して,

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{x} \\ \Leftrightarrow &\frac{1}{x} = \frac{1}{64} \\ \Leftrightarrow &x = 64 \end{aligned}$$

$$(x, y) = \left(64, \frac{1}{4}\right)$$

☆ 対数の逆算は以下のようにしてもよい.

$$\begin{aligned} \log_2 y = -2 &\Leftrightarrow \log_2 y = -2 \log_2 2 \\ \Leftrightarrow \log_2 y &= \log_2 2^{-2} \Leftrightarrow y = 2^{-2} \end{aligned}$$

☆ 別解

題意から, $y \neq 0$ であるから, $\textcircled{1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y^3}$

これを②に代入して解く方が早いだろう.

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &\Leftrightarrow \log_2 (2^x \cdot 4^y) = \log_2 27 \\ &\Leftrightarrow \log_2 2^x + \log_2 2^{2y} = 3 \log_2 3 \\ &\Leftrightarrow x + 2y = 3 \log_2 3 \quad \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} &\Leftrightarrow \log_2 2^{x+y} = \log_2 3 \\ &\Leftrightarrow x + y = \log_2 3 \quad \cdots \textcircled{4} \end{aligned}$$

③ と ④ の連立方程式を解いて,

$$(x, y) = (-\log_2 3, 2 \log_2 3)$$

☆ 別解

3 を底として両辺の対数をとった場合,

$$(x, y) = \left(-\frac{1}{\log_3 2}, \frac{2}{\log_3 2}\right)$$

2. 実数 x, y について解け. (S 級 1 分 45 秒, A 級 2 分 40 秒, B 級 4 分, C 級 6 分)

$$(1) \quad \begin{cases} y^3 = \frac{1}{x^2} & \cdots \textcircled{1} \\ \log_3 x + \log_3 y = 1 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

②の真数条件から, x, y は正の実数.

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &\Leftrightarrow \log_3 y^3 = \log_3 x^{-2} \\ &\Leftrightarrow 3 \log_3 y = -2 \log_3 x \\ &\Leftrightarrow \log_3 y = -\frac{2}{3} \log_3 x \quad \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \text{に代入して,} \\ \log_3 x - \frac{2}{3} \log_3 x &= 1 \\ \Leftrightarrow \left(1 - \frac{2}{3}\right) \log_3 x &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3} \log_3 x &= 1 \\ \Leftrightarrow \log_3 x &= 3 \\ \Leftrightarrow \log_3 x &= 3 \log_3 3 \\ \Leftrightarrow \log_3 x &= \log_3 3^3 \\ \Leftrightarrow x &= 3^3 \\ \Leftrightarrow x &= 27 \end{aligned}$$

①に代入する. y は正の実数だから,

$$\begin{aligned} y^3 &= \frac{1}{(3^3)^2} \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

$$(x, y) = \left(27, \frac{1}{9}\right)$$

$$(2) \quad \begin{cases} 9^x \cdot 3^y = 6 & \cdots \textcircled{1} \\ 3^{x+y} = 4 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &\Leftrightarrow \log_3 (9^x \cdot 3^y) = \log_3 6 \\ &\Leftrightarrow \log_3 3^{2x} + \log_3 3^y = \log_3 2 + \log_3 3 \\ &\Leftrightarrow 2x + y = 1 + \log_3 2 \quad \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} &\Leftrightarrow \log_3 3^{x+y} = \log_3 4 \\ &\Leftrightarrow x + y = 2 \log_3 2 \quad \cdots \textcircled{4} \end{aligned}$$

③と④の連立方程式を解いて,

$$(x, y) = (1 - \log_3 2, 3 \log_3 2 - 1)$$

☆別解 1

$$(x, y) = \left(\log_3 \frac{3}{2}, \log_3 \frac{8}{3}\right)$$

☆別解 2

$$(x, y) = (\log_3 6 - 2 \log_3 2, 4 \log_3 2 - \log_3 6)$$

☆別解 3

2 を底として両辺の対数をとった場合,

$$(x, y) = \left(1 - \frac{1}{\log_2 3}, \frac{3}{\log_2 3} - 1\right)$$

☆答えは最初の形が適当だろう.