

反射テスト 対数 不等式 02

1. 次の不等式を解け. (S 級 1 分 35 秒, A 級 2 分 20 秒, B 級 4 分, C 級 6 分)

$$(1) \quad \log_2 (x - 3) \leq 3$$

$$(2) \quad 2\log_{\frac{1}{2}} x \geq \log_{\frac{1}{2}} (2 - x)$$

$$(3) \quad \log_{\frac{1}{3}} (x - 1) \leq \log_3 (3 - x)$$

2. 次の不等式を解け. (S 級 2 分, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 8 分)

(1) $\log_3(4-x) \leq 2$

(2) $\log_{\frac{2}{3}}(4-x) \leq 2\log_{\frac{2}{3}}(2-x)$

(3) $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) > \log_2(5-x)$

反射テスト 対数 不等式 02 解答解説

1. 次の不等式を解け. (S 級 1 分 35 秒, A 級 2 分 20 秒, B 級 4 分, C 級 6 分)

★ 真数条件 を必ず最初に確認しておくこと.

★ 対数と大小関係

$$\begin{cases} 0 < a < 1 & \text{のとき,} & A < B \Leftrightarrow \log_a A > \log_a B & \leftarrow \text{底が 1 より小さいとき大小関係は逆転} \\ 1 < a & \text{のとき,} & A < B \Leftrightarrow \log_a A < \log_a B & \leftarrow \text{底が 1 より大きいとき大小関係は維持} \end{cases}$$

$$(1) \quad \log_2 (x-3) \leq 3$$

$$(2) \quad 2 \log_{\frac{1}{2}} x \geq \log_{\frac{1}{2}} (2-x)$$

$$\star \text{真数条件 } x-3 > 0 \Leftrightarrow 3 < x$$

$$\star \text{真数条件 } 0 < x \text{ かつ } 2-x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x-3) \leq 3 \log_2 2$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} x^2 \geq \log_{\frac{1}{2}} (2-x)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x-3) \leq \log_2 2^3$$

$$\Leftrightarrow \star x^2 \leq 2-x \quad \text{かつ} \quad 0 < x < 2$$

$$\Leftrightarrow x-3 \leq 2^3 \quad \text{かつ} \quad 3 < x$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x-1) \leq 0 \quad \text{かつ} \quad 0 < x < 2$$

$$\Leftrightarrow x \leq 11 \quad \text{かつ} \quad 3 < x$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq x \leq 1 \quad \text{かつ} \quad 0 < x < 2$$

$$\therefore 3 < x \leq 11$$

$$\therefore 0 < x \leq 1$$

★ $0 < \text{底} < 1$ のときは, 不等号が逆転

$$(3) \quad \log_{\frac{1}{3}} (x-1) \leq \log_3 (3-x)$$

$$\star \text{真数条件から, } x-1 > 0 \text{ かつ } 3-x > 0 \Leftrightarrow 1 < x < 3$$

$$\text{左辺} = \frac{\log_3 (x-1)}{\log_3 \frac{1}{3}} = -\log_3 (x-1) \quad \text{であるから,}$$

$$\text{与式} \Leftrightarrow -\log_3 (x-1) \leq \log_3 (3-x)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \log_3 (x-1) + \log_3 (3-x)$$

$$\Leftrightarrow \log_3 1 \leq \log_3 (x-1)(3-x)$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq (x-1)(3-x) \quad \text{かつ} \quad 1 < x < 3$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 \leq 0 \quad \text{かつ} \quad 1 < x < 3$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \quad \text{かつ} \quad 1 < x < 3$$

$$\therefore x = 2$$

2. 次の与式を解け。(S級2分, A級3分, B級5分, C級8分)

(1) $\log_3(4-x) \leq 2$

★真数条件 $4-x > 0 \Leftrightarrow x < 4$

$$\begin{aligned} \text{与式} &\Leftrightarrow \log_3(4-x) \leq 2\log_3 3 \\ &\Leftrightarrow \log_3(4-x) \leq \log_3 3^2 \\ &\Leftrightarrow 4-x \leq 3^2 \quad \text{かつ} \quad x < 4 \\ &\Leftrightarrow -5 \leq x \quad \text{かつ} \quad x < 4 \end{aligned}$$

$$\therefore -5 \leq x < 4$$

(2) $\log_{\frac{2}{3}}(4-x) \leq 2\log_{\frac{2}{3}}(2-x)$

★真数条件から, $4-x > 0$ かつ $2-x > 0 \Leftrightarrow x < 2$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \log_{\frac{2}{3}}(4-x) \leq \log_{\frac{2}{3}}(2-x)^2 \\ &\Leftrightarrow \star (4-x) \geq (2-x)^2 \quad \text{かつ} \quad x < 2 \\ &\Leftrightarrow 4-x \geq x^2 - 4x + 4 \quad \text{かつ} \quad x < 2 \\ &\Leftrightarrow x(x-3) \leq 0 \quad \text{かつ} \quad x < 2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq x \leq 3 \quad \text{かつ} \quad x < 2 \end{aligned}$$

$$\therefore 0 \leq x < 2$$

★ $0 < \text{底} < 1$ のときは, 不等号が逆転

(3) $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) > \log_2(5-x)$

★真数条件から, $x-3 > 0$ かつ $5-x > 0 \Leftrightarrow 3 < x < 5$

$$\text{左辺} = \frac{\log_2(x-3)}{\log_2 \frac{1}{2}} = -\log_2(x-3) \quad \text{であるから,}$$

$$\begin{aligned} \text{与式} &\Leftrightarrow -\log_2(x-3) > \log_2(5-x) \\ &\Leftrightarrow 0 > \log_2(x-3) + \log_2(5-x) \\ &\Leftrightarrow \log_2 1 > \log_2(x-3)(5-x) \\ &\Leftrightarrow 1 > (x-3)(5-x) \quad \text{かつ} \quad 3 < x < 5 \\ &\Leftrightarrow (x-4)^2 > 0 \quad \text{かつ} \quad 3 < x < 5 \\ &\Leftrightarrow x \neq 4 \quad \text{かつ} \quad 3 < x < 5 \end{aligned}$$

$$\therefore 3 < x < 4 \text{ 又は } 4 < x < 5$$