反射テスト　対数　不等式　01

1.　次の不等式を解け.（ S 級 1 分 35 秒, A 級 2 分 20 秒, B 級 4 分, C 級 6 分 ）

(1)　$\log_2 x < 4$

(2)　$2\log_5 x \leqq \log_5 x + \log_5 3$

(3)　$\log_{\frac{1}{3}} x \geqq \log_3 (x-2)$

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2. 次の不等式を解け.（ S 級 2 分 20 秒, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分 20 秒, C 級 8 分 ）

(1) $\log_3 x \leqq 2$

(2) $2\log_4 x > \log_4 x - \log_4 2$

(3) $\log_{\frac{1}{2}} x \geqq \log_2 (5 - x)$

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

反射テスト　対数　不等式　01　解答解説

1.　次の不等式を解け.（ S 級 1 分 35 秒, A 級 2 分 20 秒, B 級 4 分, C 級 6 分 ）

★ **真数条件** を必ず最初に確認しておくこと.

★ **対数と大小関係**

$$\begin{cases} 0 < a < 1 \quad \text{のとき,} \quad A < B \iff \log_a A > \log aB & \leftarrow \textbf{底が 1 より小さいとき大小関係は逆転} \\ 1 < a \quad \text{のとき,} \quad A < B \iff \log_a A < \log aB & \leftarrow \textbf{底が 1 より大きいとき大小関係は維持} \end{cases}$$

(1)　$\log_2 x < 4$

★真数条件 $x > 0$

与式 $\iff \log_2 x < 4\log_2 2$

$\iff \log_2 x < \log_2 2^4$

$\iff x < 2^4$　かつ　$0 < x$（真数条件）

$\iff x < 16$　かつ　$0 < x$

$\therefore$　$\boldsymbol{0 < x < 16}$

(2)　$2\log_5 x \leqq \log_5 x + \log_5 3$

★真数条件 $x > 0$

与式 $\iff \log_5 x^2 \leqq \log_5 (3x)$

$\iff x^2 \leqq 3x$　かつ　$0 < x$

$\iff x(x-3) \leqq 0$　かつ　$0 < x$

$\iff 0 \leqq x \leqq 3$　かつ　$0 < x$

$\therefore$　$\boldsymbol{0 < x \leqq 3}$

(3)　$\log_{\frac{1}{3}} x \geqq \log_3 (x-2)$

★真数条件から, $x > 0$ かつ $x - 2 > 0 \iff x > 2$

左辺 $= \dfrac{\log_3 x}{\log_3 \frac{1}{3}} = -\log_3 x$　であるから,

与式 $\iff -\log_3 x \geqq \log_3 (x-2)$

$\iff 0 \geqq \log_3 x + \log_3 (x-2)$

$\iff \log_3 1 \geqq \log_3 x(x-2)$

$\iff 1 \geqq x(x-2)$　かつ　$2 < x$

$\iff x^2 - 2x - 1 \leqq 0$　かつ　$2 < x$

$\iff 1 - \sqrt{2} \leqq x \leqq 1 + \sqrt{2}$　かつ　$2 < x$

$\therefore$　$\boldsymbol{2 < x \leqq 1 + \sqrt{2}}$

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2. 次の与式を解け.（ S 級 2 分 20 秒, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分 20 秒, C 級 8 分 ）

(1) $\log_3 x \leqq 2$

★真数条件 $x > 0$

与式 $\Leftrightarrow$ $\log_3 x \leqq 2\log_3 3$

$\Leftrightarrow$ $\log_3 x \leqq \log_3 3^2$

$\Leftrightarrow$ $x \leqq 3^2$ かつ $0 < x$

$\Leftrightarrow$ $x \leqq 9$ かつ $0 < x$

$\therefore$ $\boldsymbol{0 < x \leqq 9}$

(2) $2\log_4 x > \log_4 x - \log_4 2$

★真数条件 $x > 0$

与式 $\Leftrightarrow$ $\log_4 x^2 > \log_4\left(\dfrac{x}{2}\right)$

$\Leftrightarrow$ $x^2 > \dfrac{x}{2}$ かつ $0 < x$

$\Leftrightarrow$ $x\left(x - \dfrac{1}{2}\right) > 0$ かつ $0 < x$

$\Leftrightarrow$ 「 $x < 0$ 又は $\dfrac{1}{2} < x$ 」 かつ $0 < x$

$\therefore$ $\boldsymbol{\dfrac{1}{2} < x}$

(3) $\log_{\frac{1}{2}} x \geqq \log_2(5 - x)$

★真数条件から, $x > 0$ かつ $5 - x > 0$ $\Leftrightarrow$ $0 < x < 5$

左辺 $= \dfrac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} = -\log_2 x$ であるから,

与式 $\Leftrightarrow$ $-\log_2 x \geqq \log_2(5 - x)$

$\Leftrightarrow$ $0 \geqq \log_2 x + \log_2(5 - x)$

$\Leftrightarrow$ $\log_2 1 \geqq \log_2 x(5 - x)$

$\Leftrightarrow$ $1 \geqq x(5 - x)$ かつ $0 < x < 5$

$\Leftrightarrow$ $x^2 - 5x + 1 \geqq 0$ かつ $0 < x < 5$

$\Leftrightarrow$ 「 $x \leqq \dfrac{5 - \sqrt{21}}{2}$ 又は $\dfrac{5 + \sqrt{21}}{2} \leqq x$ 」 かつ $0 < x < 5$

$\boldsymbol{0 < x \leqq \dfrac{5 - \sqrt{21}}{2}}$ **又は** $\boldsymbol{\dfrac{5 + \sqrt{21}}{2} \leqq x < 5}$

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）