

反射テスト 数列 連分数と極限 01

1. 次の漸化式で表される数列 a_n を考える. ただし $n = 1, 2, 3, \dots$ とする.

$$a_1 = 1, a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}.$$

(S 級 2 分, A 級 3 分 40 秒, B 級 5 分, C 級 7 分)

(1) a_2, a_3, a_4, a_5 を求めよ.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

2. 次の漸化式で表される数列 a_n を考える. ただし $n = 1, 2, 3, \dots$ とする.

$$a_1 = 1, a_{n+1} = 2 + \frac{1}{a_n}.$$

(S 級 2 分, A 級 3 分 40 秒, B 級 5 分, C 級 7 分)

- (1) a_2, a_3, a_4, a_5 を求めよ.

- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

反射テスト 数列 連分数と極限 01 解答解説

1. 次の漸化式で表される数列 a_n を考える. ただし $n = 1, 2, 3, \dots$ とする.

$$a_1 = 1, a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}.$$

(S 級 2 分, A 級 3 分 40 秒, B 級 5 分, C 級 7 分)

- (1) a_2, a_3, a_4, a_5 を求めよ.

- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

(1)

$$a_2 = 1 + \frac{1}{a_1} = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

$$a_3 = 1 + \frac{1}{a_2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$a_4 = 1 + \frac{1}{a_3} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

$$a_5 = 1 + \frac{1}{a_4} = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$$

☆これらはフィボナッチ数列の倍率である.

(2)

収束するのあれば, 正の実数 x に対して, $x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ とおける.

漸化式の極限をとると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n} \right)$$

$$\Leftrightarrow x = 1 + \frac{1}{x} \quad \text{かつ} \quad x > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \quad \text{かつ} \quad x > 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

★ 黄金数の連分数表記 数列 a_n の性質から, 次の連分数の極限がわかる.

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}}}$$

☆この数列 a_n の一般項について

ちなみに a_n が [★フィボナッチ数列](#) とわかれれば, $b_1 = 1, b_{n+1} = a_n \cdot b_n$ とおけて,

$$\begin{aligned} a_1 = 1 \quad \text{かつ} \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} &\Leftrightarrow b_1 = b_2 = 1 \quad \text{かつ} \quad \frac{b_{n+2}}{b_{n+1}} = 1 + \frac{b_n}{b_{n+1}} \\ &\Leftrightarrow b_1 = b_2 = 1 \quad \text{かつ} \quad b_{n+2} = b_{n+1} + b_n \end{aligned}$$

特性方程式 $x^2 = x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ から, $\alpha = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ とおけて,

$$n = 1, 2, 3, \dots \text{ に対して, } \begin{cases} b_{n+2} - \alpha \cdot b_{n+1} = \beta (b_{n+1} - \alpha \cdot b_n) \\ b_{n+2} - \beta \cdot b_{n+1} = \alpha (b_{n+1} - \beta \cdot b_n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_{n+1} = \alpha \cdot b_n + \beta^{n-1} \cdot (b_2 - \alpha \cdot b_1) \\ b_{n+1} = \beta \cdot b_n + \alpha^{n-1} \cdot (b_2 - \beta \cdot b_1) \end{cases}$$

b_{n+1} を消去して, b_n について解くと, $n = 2, 3, 4, \dots$ に対して, $b_n = \frac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha} \leftarrow n = 1$ のときも成立.

$$\therefore a_n = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta^n - \alpha^n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \leftarrow n \rightarrow \infty \text{ のとき } a_n \rightarrow \beta$$

☆詳細は [★フィボナッチ数列の倍率の極限](#) を参照.

2. 次の漸化式で表される数列 a_n を考える. ただし $n = 1, 2, 3, \dots$ とする.

$$a_1 = 1, a_{n+1} = 2 + \frac{1}{a_n}.$$

(S 級 2 分, A 級 3 分 40 秒, B 級 5 分, C 級 7 分)

(1) a_2, a_3, a_4, a_5 を求めよ.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

(1)

$$a_2 = 1 + \frac{1}{a_1} = 1 + \frac{1}{1} = 3$$

$$a_3 = 1 + \frac{1}{a_2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$a_4 = 1 + \frac{1}{a_3} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

$$a_5 = 1 + \frac{1}{a_4} = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$$

(2)

収束するのあれば, 正の実数 x に対して, $x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ とおける.

漸化式の極限をとると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{a_n} \right)$$

$$\Leftrightarrow x = 2 + \frac{1}{x} \quad \text{かつ} \quad x > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \quad \text{かつ} \quad x > 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{2}$$

$$\star \sqrt{2} \text{の連分数表記} \quad 1 + \sqrt{2} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}}}} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}}}}$$

☆この数列の一般項について

$b_1 = 1, b_{n+1} = a_n \cdot b_n$ とおけて,

$$\begin{aligned} a_1 = 1 \quad \text{かつ} \quad a_{n+1} = 2 + \frac{1}{a_n} &\Leftrightarrow b_1 = b_2 = 1 \quad \text{かつ} \quad \frac{b_{n+2}}{b_{n+1}} = 2 + \frac{b_n}{b_{n+1}} \\ &\Leftrightarrow b_1 = b_2 = 1 \quad \text{かつ} \quad b_{n+2} = 2b_{n+1} + b_n \end{aligned}$$

特性方程式 $x^2 = 2x + 1 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$ から, $\alpha = 1 - \sqrt{2}, \beta = 1 + \sqrt{2}$ とおけて,

$$n = 1, 2, 3, \dots \text{ に対して, } \begin{cases} b_{n+2} - \alpha \cdot b_{n+1} = \beta (b_{n+1} - \alpha \cdot b_n) \\ b_{n+2} - \beta \cdot b_{n+1} = \alpha (b_{n+1} - \beta \cdot b_n) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow n = 2, 3, 4, \dots \text{ に対して, } \begin{cases} b_{n+1} = \alpha \cdot b_n + \beta^{n-1} \cdot (b_2 - \alpha \cdot b_1) \\ b_{n+1} = \beta \cdot b_n + \alpha^{n-1} \cdot (b_2 - \beta \cdot b_1) \end{cases}$$

b_{n+1} を消去して, b_n について解くと, $n = 2, 3, 4, \dots$ に対して, $b_n = \frac{\beta^{n-1} + \alpha^{n-1}}{2} \quad \leftarrow n = 1 \text{ のときも成立.}$

$$\therefore a_n = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\beta^n + \alpha^n}{\beta^{n-1} + \alpha^{n-1}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \Rightarrow n \rightarrow \infty \text{ のとき } a_n = \frac{\beta + \alpha \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1}}{1 + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1}} \rightarrow \beta = 1 + \sqrt{2}$$

★ 白銀数 黄金数 $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ に対して, $1 + \sqrt{2}$ は ★ 白銀数 $(1 + \sqrt{2})$ と呼ばれる ★ 貴金属数 の一つ.

★ 第 n 貴金属数 (metallic number) とは, $1 : x_n = x_n : (nx_n + 1)$ を満たす x_n . 結果, $x_n = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}$ となる.

x_1, x_2, x_3 をそれぞれ 黄金数 (golden number), 白銀数 (silver number), 青銅数 (bronze number) という.

この反射テストの 2 つの問題から推定できるが, 漸化式 $a_{n+1} = m + \frac{1}{a_n}$ となる数列 a_n の極限は, 第 m 貴金属数になる.