反射テスト　数列　フィボナッチ数列と極限　01

1.　次の漸化式で表される数列 a_n を考える．ただし $n=1,2,3,\cdots$ とする．

$a_1=a_2=1$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$.　　（ S 級 4 分 40 秒, A 級 6 分, B 級 8 分, C 級 12 分 ）

（1）　一般項 a_n を求めよ．

（2）　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ を求めよ．

2. 次の漸化式で表される数列 a_n を考える．ただし $n=1,2,3,\cdots$ とする．

$a_1=a_2=1$, $a_{n+2}=a_{n+1}+3a_n$.　（ S 級 4 分 40 秒, A 級 6 分, B 級 8 分, C 級 12 分 ）

（1） 一般項 a_n を求めよ．

（2） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$ を求めよ．

反射テスト　数列　フィボナッチ数列と極限　01　解答解説

1.　次の漸化式で表される数列 a_n を考える．ただし $n=1,2,3,\cdots$ とする．

$a_1=a_2=1$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$.　　（ S 級 4 分 40 秒，A 級 6 分，B 級 8 分，C 級 12 分 ）

（1）　一般項 a_n を求めよ．

（2）　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ を求めよ．

(1) **★ フィボナッチ数列** $\cdots$ 前 2 項の和で次の項を作る．

$$\begin{cases} a_1=1 & \cdots ① \\ a_2=1 & \cdots ② \\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \quad (n=1,2,3,\cdots) & \cdots ③ \end{cases}$$

★ 隣接 3 項間漸化式の特性方程式は 2 次方程式

Ⓐ　$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$　$\Rightarrow$　特性方程式 $x^2=px+q$ を解く

Ⓑ　特性方程式の解が $x=\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ であれば次の 2 つが成立する．

$i)$　数列 $\{\ a_{n+1}-\boldsymbol{\alpha}\,a_n\ \}$ は，公比 $\boldsymbol{\beta}$ の等比数列

$ii)$　数列 $\{\ a_{n+1}-\boldsymbol{\beta}\,a_n\ \}$ は，公比 $\boldsymbol{\alpha}$ の等比数列

③ から特性方程式は　$x^2=x+1$　$\Leftrightarrow$　$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$\alpha=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ とおくと，

よって　③　$\Leftrightarrow$　$n=1,2,3,\cdots$ に対して，$\begin{cases} a_{n+2}-\alpha\cdot a_{n+1}=\beta\,(a_{n+1}-\alpha\cdot a_n) \\ a_{n+2}-\beta\cdot a_{n+1}=\alpha\,(a_{n+1}-\beta\cdot a_n) \end{cases}$

$\Leftrightarrow$　$n=2,3,4,\cdots$ に対して，$\begin{cases} a_{n+1}-\alpha\cdot a_n=\beta\,(a_n-\alpha\cdot a_{n-1}) \\ a_{n+1}-\beta\cdot a_n=\alpha\,(a_n-\beta\cdot a_{n-1}) \end{cases}$

$\Leftrightarrow$　$n=2,3,4,\cdots$ に対して，$\begin{cases} a_{n+1}-\alpha\cdot a_n=\beta^{n-1}\cdot(a_2-\alpha\cdot a_1) \\ a_{n+1}-\beta\cdot a_n=\alpha^{n-1}\cdot(a_2-\beta\cdot a_1) \end{cases}$

a_{n+1} を消去して，a_n について解くと，$n=2,3,4,\cdots$ に対して，

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\beta^{n-1}\cdot(a_2-\alpha\cdot a_1)-\alpha^{n-1}\cdot(a_2-\beta\cdot a_1)}{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\beta^{n-1}\cdot(1-\alpha)-\alpha^{n-1}\cdot(1-\beta)}{\beta-\alpha} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} \end{aligned}$$

$n=1$ のとき，$a_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=1$ より，$n=1$ のときも成立する．

$$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}}\quad(\ \boldsymbol{n=1,2,3,\cdots}\ )$$

(2)　**★フィボナッチ数列の倍率の極限**

$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\left|\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right|<1$ であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n=0$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta^n-\alpha^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\beta-\alpha\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n}{1-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n}=\beta=\boldsymbol{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

★ フィボナッチ数列と黄金比 フィボナッチ数列の倍率がと黄金比 $\left(1:\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ に収束することがわかる．

2. 次の漸化式で表される数列 a_n を考える．ただし $n=1,2,3,\cdots$ とする．

$a_1=a_2=1$, $a_{n+2}=a_{n+1}+3a_n$.　　（ S 級 4 分 40 秒, A 級 6 分, B 級 8 分, C 級 12 分 ）

(1) 一般項 a_n を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$ を求めよ．

(1)

$$\begin{cases} a_1=1 & \cdots① \\ a_2=1 & \cdots② \\ a_{n+2}=a_{n+1}+3a_n \quad (n=1,2,3,\cdots) & \cdots③ \end{cases}$$

★ 隣接 3 項間漸化式の特性方程式は 2 次方程式

Ⓐ　$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n \quad \Rightarrow$ 特性方程式 $x^2=px+q$ を解く

Ⓑ　特性方程式の解が $x=\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ であれば次の 2 つが成立する．

$i)$ 数列 $\{\ a_{n+1}-\boldsymbol{\alpha}\,a_n\ \}$ は，公比 $\boldsymbol{\beta}$ の等比数列

$ii)$ 数列 $\{\ a_{n+1}-\boldsymbol{\beta}\,a_n\ \}$ は，公比 $\boldsymbol{\alpha}$ の等比数列

③ から特性方程式は　$x^2=x+3 \quad \Leftrightarrow \quad x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$

$\alpha=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$, $\beta=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$ とおくと，

よって　③　$\Leftrightarrow$　$n=1,2,3,\cdots$ に対して，
$$\begin{cases} a_{n+2}-\alpha\cdot a_{n+1}=\beta\,(a_{n+1}-\alpha\cdot a_n) \\ a_{n+2}-\beta\cdot a_{n+1}=\alpha\,(a_{n+1}-\beta\cdot a_n) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$　$n=2,3,4,\cdots$ に対して，
$$\begin{cases} a_{n+1}-\alpha\cdot a_n=\beta\,(a_n-\alpha\cdot a_{n-1}) \\ a_{n+1}-\beta\cdot a_n=\alpha\,(a_n-\beta\cdot a_{n-1}) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$　$n=2,3,4,\cdots$ に対して，
$$\begin{cases} a_{n+1}-\alpha\cdot a_n=\beta^{n-1}\cdot(a_2-\alpha\cdot a_1) \\ a_{n+1}-\beta\cdot a_n=\alpha^{n-1}\cdot(a_2-\beta\cdot a_1) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$　$n=2,3,4,\cdots$ に対して，
$$\begin{cases} a_{n+1}=\alpha\cdot a_n+\beta^{n-1}\cdot(a_2-\alpha\cdot a_1) \\ a_{n+1}=\beta\cdot a_n+\alpha^{n-1}\cdot(a_2-\beta\cdot a_1) \end{cases}$$

a_{n+1} を消去して，a_n について解くと，$n=2,3,4,\cdots$ に対して，

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\beta^{n-1}\cdot(a_2-\alpha\cdot a_1)-\alpha^{n-1}\cdot(a_2-\beta\cdot a_1)}{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\beta^{n-1}\cdot(1-\alpha)-\alpha^{n-1}\cdot(1-\beta)}{\beta-\alpha} \\ &= \frac{1}{\sqrt{13}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^n\right\} \end{aligned}$$

$n=1$ のとき，$a_1=\dfrac{1}{\sqrt{13}}\left(\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}-\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\right)=1$ より，$n=1$ のときも成立する．

$$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=\frac{1}{\sqrt{13}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^n\right\}} \quad (\ \boldsymbol{n=1,2,3,\cdots}\ )$$

(2)

$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\left|\dfrac{1-\sqrt{13}}{1+\sqrt{13}}\right|<1$ であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n=0$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\beta^n-\alpha^n}{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\beta}\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n}{1-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1}}=\frac{1}{\beta}=\boldsymbol{\frac{1-\sqrt{13}}{6}}$$