反射テスト　数列　群数列の一般項の推定　01

1.　一般項 a_n を推定せよ. 証明は不必要.（ S 級 1 分 40 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分 ）

（1）　$4\ ,\ 6\ ,\ 9\ ,\ 11\ ,\ 14\ ,\ 16\ ,\ 19\ ,\ \cdots$

（2）

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
a_n	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{27}$	0	$\frac{1}{81}$	$\cdots$

2. 一般項 a_n を推定せよ. 証明は不必要.（ S 級 1 分 40 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分 ）

（1） 1 , 5 , 7 , 11 , 13 , 17 , 19 , $\cdots$

（2）

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
a_n	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{27}$	$\cdots$

反射テスト　数列　群数列の一般項の推定　01　解答解説

1.　一般項 a_n を推定せよ. 証明は不必要.（ S 級 1 分 40 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分 ）

★ 一般項の推定

どんな問題でも使える技は, 一般項を **推定** し, **数学的帰納法** を用いて証明してしまう方法である. 漸化式から一般項を求める方法が思いつかないときに使う. もちろん推定ができなければお手上げである.

(1)　4 , 6 , 9 , 11 , 14 , 16 , 19 , $\cdots$

階差数列が, $2, 3, 2, 3, 2, 3, \cdots$,

$\Rightarrow$　2 項ごとに組分けして考える.

$n = 2k-1$, $2k$　$(k = 1, 2, 3, \cdots)$

と場合分けして考えよう.

奇数項は公差 5 の等差数列.

$\Rightarrow$　$a_{2k-1} = 4 + 5(k-1)$

偶数項も公差 5 の等差数列.

$\Rightarrow$　$a_{2k} = 6 + 5(k-1)$

$\therefore$　$\boldsymbol{n = 1, 2, 3, \cdots}$ **に対して,**

ある自然数 $\boldsymbol{k}$ を用いれば,

$$\begin{cases} \boldsymbol{5k-1} & (\boldsymbol{n = 2k-1}) \\ \boldsymbol{5k+1} & (\boldsymbol{n = 2k}) \end{cases}$$

☆別解　表記の仕方は別にも考えられる.

$\boldsymbol{n = 1, 2, 3, \cdots}$ **に対して,**

ある 0 以上の整数 $\boldsymbol{k}$ を用いれば,

$$\begin{cases} \boldsymbol{5k+4} & (\boldsymbol{n = 2k+1}) \\ \boldsymbol{5k+1} & (\boldsymbol{n = 2k}) \end{cases}$$

(2)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
a_n	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{27}$	0	$\frac{1}{81}$	$\cdots$

0 が 1 項とびで出現している.

2 項ごとに組み分けして考える.

$n = 2k-1$, $2k$　$(k = 1, 2, 3, \cdots)$

と場合分けして考えよう.

奇数項は公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列.

$\Rightarrow$　$a_{2k-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

偶数項は 0 である.

$\Rightarrow$　$a_{2k} = 0$

$\therefore$　$\boldsymbol{n = 1, 2, 3, \cdots}$ **に対して,**

ある自然数 $\boldsymbol{k}$ を用いれば,

$$\boldsymbol{a_n} = \begin{cases} \boldsymbol{\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}} & (\boldsymbol{n = 2k-1}) \\ \boldsymbol{0} & (\boldsymbol{n = 2k}) \end{cases}$$

☆別解　表記の仕方は別にも考えられる.

$\boldsymbol{n = 1, 2, 3, \cdots}$ **に対して,**

ある 0 以上の整数 $\boldsymbol{k}$ を用いれば,

$$\boldsymbol{a_n} = \begin{cases} \boldsymbol{\left(\frac{1}{3}\right)^{k}} & (\boldsymbol{n = 2k+1}) \\ \boldsymbol{0} & (\boldsymbol{n = 2k}) \end{cases}$$

2.　一般項 a_n を推定せよ. 証明は不必要.（ S 級 1 分 40 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分 ）

★ 一般項の推定

どんな問題でも使える技は, 一般項を **推定** し, **数学的帰納法** を用いて証明してしまう方法である. 漸化式から一般項を求める方法が思いつかないときに使う. もちろん推定ができなければお手上げである.

(1)　$1\ ,\ 5\ ,\ 7\ ,\ 11\ ,\ 13\ ,\ 17\ ,\ 19\ ,\ \cdots$

階差数列が, $4, 2, 4, 2, 4, 2, \cdots$,

$\Rightarrow$　2 項ごとに組分けして考える.

$n = 2k-1\ ,\ 2k \quad (k = 1, 2, 3, \cdots)$

と場合分けして考えよう.

奇数項は公差 6 の等差数列.

$\Rightarrow \quad a_{2k-1} = 1 + 6(k-1)$

偶数項も公差 6 の等差数列.

$\Rightarrow \quad a_{2k} = 5 + 6(k-1)$

$\therefore$　$\boldsymbol{n = 1, 2, 3, \cdots}$ **に対して,**

ある自然数 $\boldsymbol{k}$ を用いれば,

$$\begin{cases} \boldsymbol{6k-5} & \boldsymbol{(n = 2k-1)} \\ \boldsymbol{6k-1} & \boldsymbol{(n = 2k)} \end{cases}$$

☆別解　表記の仕方は別にも考えられる.

$\boldsymbol{n = 1, 2, 3, \cdots}$ **に対して,**

ある 0 以上の整数 $\boldsymbol{k}$ を用いれば,

$$\begin{cases} \boldsymbol{6k+1} & \boldsymbol{(n = 2k+1)} \\ \boldsymbol{6k-1} & \boldsymbol{(n = 2k)} \end{cases}$$

★ 双子素数

$(3, 5)$ 以外の双子素数 (差が 2 の素数 1 組) は

$6n \pm 1$

の形になる.

(2)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
a_n	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{27}$	$\cdots$

今度は 0 が 2 項とびで出現している.

3 項ごとに組み分けして考える.

$n = 3k-2\ ,\ 3k-1\ ,\ 3k \quad (k = 1, 2, 3, \cdots)$

と場合分けして考えよう.

3 で割って 1 余る項は,

初項 1 , 公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列.

$\Rightarrow \quad a_{3k-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

3 で割って 2 余る項は, 0.

$\Rightarrow \quad a_{3k-1} = 0$

3 で割って割り切れる項は,

初項 $\frac{1}{3}$, 公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列.

$\Rightarrow \quad a_{3k} = \left(\frac{1}{3}\right)^{k}$

$\therefore$　$\boldsymbol{n = 1, 2, 3, \cdots}$ **に対して,**

ある自然数 $\boldsymbol{k}$ を用いれば,

$$\boldsymbol{a_n} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{\boldsymbol{k-1}} & \boldsymbol{(n = 3k-2)} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{(n = 3k-1)} \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{\boldsymbol{k}} & \boldsymbol{(n = 3k)} \end{cases}$$

☆別解　表記の仕方は別にも考えられる.

$\boldsymbol{n = 1, 2, 3, \cdots}$ **に対して,**

ある 0 以上の整数 $\boldsymbol{k}$ を用いれば,

$$\boldsymbol{a_n} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{\boldsymbol{k}} & \boldsymbol{(n = 3k+1)} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{(n = 3k+2)} \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{\boldsymbol{k}} & \boldsymbol{(n = 3k)} \end{cases}$$