

反射テスト 数列 漸化式と数学的帰納法 01

1. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n - 4}{a_n - 3}$ で定められる数列 a_n がある.

(S 級 5 分, A 級 7 分, B 級 10 分, C 級 13 分)

- (1) すべての自然数 n に対して $a_n \neq 2$ であることを示せ.
- (2) $b_n = \frac{1}{a_n - 2}$ とおくと、 b_{n+1} を b_n で表せ.
- (3) 一般項 a_n を求めよ.

2. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n - 9}{a_n - 5}$ で定められる数列 a_n がある.

(S 級 5 分, A 級 7 分, B 級 10 分, C 級 13 分)

- (1) すべての自然数 n に対して $a_n \neq 3$ であることを示せ.
- (2) $b_n = \frac{1}{a_n - 3}$ とおくと、 b_{n+1} を b_n で表せ.
- (3) 一般項 a_n を求めよ.

反射テスト 数列 漸化式と数学的帰納法 01 解答解説

1. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n - 4}{a_n - 3}$ で定められる数列 a_n がある. (S 級 5 分, A 級 7 分, B 級 10 分, C 級 13 分)

(1) すべての自然数 n に対して $a_n \neq 2$ であることを示せ.

(2) $b_n = \frac{1}{a_n - 2}$ とおくと、 b_{n+1} を b_n で表せ.

(3) 一般項 a_n を求めよ.

解答

(1) 数学的帰納法を用いる.

① $n = 1$ のとき, $a_1 = 1 \neq 2$

② $n = k$ のとき, $a_k \neq 2$ と仮定する.

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{a_k - 4}{a_k - 3} \\ &= 1 + \frac{-1}{a_k - 3} \quad \leftarrow \textcircled{3} \end{aligned}$$

$$\text{もし, } a_{k+1} = 2 \text{ になるならば, } 2 = 1 + \frac{-1}{a_k - 3} \quad \Leftrightarrow \quad a_k = 2$$

この対偶は $a_k \neq 2$ ならば, $a_{k+1} \neq 2$.

よって, $n = k$ のとき $a_k \neq 2$ ならば, $n = k + 1$ のとき $a_{k+1} \neq 2$.

①, ② から, 数学的帰納法により, $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, $a_n \neq 2$ である.

(2) (1) から, $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, $b_n = \frac{1}{a_n - 2}$ とおけて,

$$a_n = 2 + \frac{1}{b_n}$$

つまり, $a_{n+1} = 2 + \frac{1}{b_{n+1}}$ かつ $b_n \neq 0$ であるから, a_n の漸化式 ③ に代入して,

$$2 + \frac{1}{b_{n+1}} = 1 + \frac{-1}{2 + \frac{1}{b_n} - 3}$$

左辺の 2 を移行して, 整理すると,

$$\frac{1}{b_{n+1}} = -1 - \frac{1}{\frac{1}{b_n} - 1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{b_{n+1}} = -1 - \frac{b_n}{1 - b_n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{b_{n+1}} = \frac{-1}{1 - b_n}$$

$$\Leftrightarrow b_{n+1} = b_n - 1$$

(3) (2) と $b_1 = \frac{1}{a_1 - 2} = -1$ から, $b_n = -n$

ゆえに

$$a_n = 2 + \frac{1}{b_n} = 2 - \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\text{答え} \quad a_n = 2 - \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

2. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n - 9}{a_n - 5}$ で定められる数列 a_n がある.

(S 級 5 分, A 級 7 分, B 級 10 分, C 級 13 分)

- (1) すべての自然数 n に対して $a_n \neq 3$ であることを示せ.
(2) $b_n = \frac{1}{a_n - 3}$ とおくと、 b_{n+1} を b_n で表せ.
(3) 一般項 a_n を求めよ.

解答

(1) 数学的帰納法を用いる.

① $n = 1$ のとき, $a_1 = 1 \neq 3$

② $n = k$ のとき, $a_k \neq 3$ と仮定する.

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{a_k - 9}{a_k - 5} \\ &= 1 + \frac{-4}{a_k - 5} \quad \leftarrow \textcircled{3} \end{aligned}$$

$$\text{もし, } a_{k+1} = 3 \text{ になるならば, } 3 = 1 + \frac{-4}{a_k - 5} \quad \Leftrightarrow \quad a_k = 3$$

この対偶は $a_k \neq 3$ ならば, $a_{k+1} \neq 3$.

よって, $n = k$ のとき $a_k \neq 3$ ならば, $n = k + 1$ のとき $a_{k+1} \neq 3$.

①, ② から, 数学的帰納法により, $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, $a_n \neq 3$ である.

(2) (1) から, $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, $b_n = \frac{1}{a_n - 3}$ とおけて,

$$a_n = 3 + \frac{1}{b_n}$$

つまり, $a_{n+1} = 3 + \frac{1}{b_{n+1}}$ かつ $b_n \neq 0$ であるから, a_n の漸化式 ③ に代入して,

$$3 + \frac{1}{b_{n+1}} = 1 + \frac{-4}{3 + \frac{1}{b_n} - 5}$$

左辺の 3 を移行して, 整理すると,

$$\frac{1}{b_{n+1}} = -2 - \frac{4}{\frac{1}{b_n} - 2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{b_{n+1}} = -2 - \frac{4b_n}{1 - 2b_n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{b_{n+1}} = \frac{-2}{1 - 2b_n}$$

$$\Leftrightarrow b_{n+1} = b_n - \frac{1}{2}$$

(3) (2) と $b_1 = \frac{1}{a_1 - 3} = -\frac{1}{2}$ から, $b_n = -\frac{n}{2}$

ゆえに

$$a_n = 3 + \frac{1}{b_n} = 3 - \frac{2}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

これは $n = 1$ のときも満たす.

$$\text{答え} \quad a_n = 3 - \frac{2}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$