反射テスト　数列　漸化式　フィボナッチ数列　01

1.　次の数列の一般項 a_n を求めよ．ただし $n = 1, 2, 3, \cdots$ とする．（ S 級 4 分, A 級 6 分, B 級 10 分, C 級 15 分 ）

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \cdots$

2. 次の数列の一般項 a_n を求めよ．ただし $n = 1, 2, 3, \cdots$ とする．（ S 級 3 分 40 秒, A 級 4 分 30 秒, B 級 6 分, C 級 10 分 ）

$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \cdots$

反射テスト　数列　漸化式　フィボナッチ数列　01　解答解説

1.　次の数列の一般項 a_n を求めよ．ただし $n=1,2,3,\cdots$ とする．（ S 級 4 分, A 級 6 分, B 級 10 分, C 級 15 分 ）
$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,\cdots$

★ フィボナッチ数列 $\cdots$ 前 2 項の和で次の項を作る．

$$\begin{cases} & a_1=1 & \cdots① \\ & a_2=1 & \cdots② \\ n=1,2,3,\cdots \text{ に対して} & a_{n+2}=a_n+a_{n+1} & \cdots③ \end{cases}$$

★ 隣接 3 項間漸化式の特性方程式は 2 次方程式

Ⓐ　$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n \quad \Rightarrow$　特性方程式 $x^2=px+q$ を解く

Ⓑ　特性方程式の解が $x=\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ であれば次の 2 つが成立する．

$i)$　数列 $\{\ a_{n+1}-\boldsymbol{\alpha}\,a_n\ \}$ は，公比 $\boldsymbol{\beta}$ の等比数列

$ii)$　数列 $\{\ a_{n+1}-\boldsymbol{\beta}\,a_n\ \}$ は，公比 $\boldsymbol{\alpha}$ の等比数列

③ から特性方程式は　$x^2=x+1 \quad \Leftrightarrow \quad x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$\alpha=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ とおくと，

よって　③　$\Leftrightarrow$　$n=1,2,3,\cdots$ に対して，$\begin{cases} a_{n+2}-\alpha\cdot a_{n+1}=\beta\,(a_{n+1}-\alpha\cdot a_n) \\ a_{n+2}-\beta\cdot a_{n+1}=\alpha\,(a_{n+1}-\beta\cdot a_n) \end{cases}$

$\Leftrightarrow$　$n=2,3,4,\cdots$ に対して，$\begin{cases} a_{n+1}-\alpha\cdot a_n=\beta\,(a_n-\alpha\cdot a_{n-1}) \\ a_{n+1}-\beta\cdot a_n=\alpha\,(a_n-\beta\cdot a_{n-1}) \end{cases}$

$\Leftrightarrow$　$n=2,3,4,\cdots$ に対して，$\begin{cases} a_{n+1}-\alpha\cdot a_n=\beta^{n-1}\cdot(a_2-\alpha\cdot a_1) \\ a_{n+1}-\beta\cdot a_n=\alpha^{n-1}\cdot(a_2-\beta\cdot a_1) \end{cases}$

$\Leftrightarrow$　$n=2,3,4,\cdots$ に対して，$\begin{cases} a_{n+1}=\alpha\cdot a_n+\beta^{n-1}\cdot(a_2-\alpha\cdot a_1) \\ a_{n+1}=\beta\cdot a_n+\alpha^{n-1}\cdot(a_2-\beta\cdot a_1) \end{cases}$

a_{n+1} を消去して，a_n について解くと，$n=2,3,4,\cdots$ に対して，

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\beta^{n-1}\cdot(a_2-\alpha\cdot a_1)-\alpha^{n-1}\cdot(a_2-\beta\cdot a_1)}{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\beta^{n-1}\cdot(1-\alpha)-\alpha^{n-1}\cdot(1-\beta)}{\beta-\alpha} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} \end{aligned}$$

$n=1$ のとき，$a_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=1$ より，$n=1$ のときも成立する．

$$\therefore \quad \boldsymbol{a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}} \qquad (\ \boldsymbol{n=1,2,3,\cdots}\ )$$

★ フィボナッチ数列 と **★ 黄金数** $\boldsymbol{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$

フィボナッチ数列と **★ 黄金数** $\boldsymbol{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$ に関係があることがわかる．黄金数とは **★貴金属数** の最初の数である．

★ 第 $\boldsymbol{n}$ 貴金属数（ ***metalic number*** ）とは，$1:x_n=x_n:(nx_n+1)$ を満たす x_n ．結果，$\boldsymbol{x_n=\dfrac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}}$ となる．
x_1,x_2,x_3 をそれぞれ **黄金数**（ ***golden number*** ）, **白銀数**（ ***silver number*** ）, **青銅数**（ ***bronze number*** ）という．

2. 次の数列の一般項 a_n を求めよ．ただし $n=1,2,3,\cdots$ とする．（S級3分40秒, A級4分30秒, B級6分, C級10分）

$0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,\cdots$

★ **フィボナッチ数列** $\cdots$ 前2項の和で次の項を作る．

$$\begin{cases} \qquad\qquad\qquad a_1=0 & \cdots① \\ \qquad\qquad\qquad a_2=1 & \cdots② \\ n=1,2,3,\cdots \text{ に対して} \quad a_{n+2}=a_n+a_{n+1} & \cdots③ \end{cases}$$

★ **隣接3項間漸化式の特性方程式は2次方程式**

Ⓐ $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n \quad \Rightarrow \quad$ 特性方程式 $x^2=px+q$ を解く

Ⓑ 特性方程式の解が $x=\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ であれば次の2つが成立する．

i) 数列 $\{\, a_{n+1}-\boldsymbol{\alpha}\, a_n \,\}$ は，公比 $\boldsymbol{\beta}$ の等比数列

ii) 数列 $\{\, a_{n+1}-\boldsymbol{\beta}\, a_n \,\}$ は，公比 $\boldsymbol{\alpha}$ の等比数列

③ から特性方程式は $\quad x^2=x+1 \quad \Leftrightarrow \quad x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$\alpha=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ とおくと，

よって　③ $\Leftrightarrow$ $n=1,2,3,\cdots$ に対して，$\begin{cases} a_{n+2}-\alpha\cdot a_{n+1}=\beta\,(a_{n+1}-\alpha\cdot a_n) \\ a_{n+2}-\beta\cdot a_{n+1}=\alpha\,(a_{n+1}-\beta\cdot a_n) \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ $n=2,3,4,\cdots$ に対して，$\begin{cases} a_{n+1}-\alpha\cdot a_n=\beta\,(a_n-\alpha\cdot a_{n-1}) \\ a_{n+1}-\beta\cdot a_n=\alpha\,(a_n-\beta\cdot a_{n-1}) \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ $n=2,3,4,\cdots$ に対して，$\begin{cases} a_{n+1}-\alpha\cdot a_n=\beta^{n-1}\cdot(a_2-\alpha\cdot a_1) \\ a_{n+1}-\beta\cdot a_n=\alpha^{n-1}\cdot(a_2-\beta\cdot a_1) \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ $n=2,3,4,\cdots$ に対して，$\begin{cases} a_{n+1}=\alpha\cdot a_n+\beta^{n-1}\cdot(a_2-\alpha\cdot a_1) \\ a_{n+1}=\beta\cdot a_n+\alpha^{n-1}\cdot(a_2-\beta\cdot a_1) \end{cases}$

a_{n+1} を消去して, a_n について解くと, $n=2,3,4,\cdots$ に対して,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\beta^{n-1}\cdot(a_2-\alpha\cdot a_1)-\alpha^{n-1}\cdot(a_2-\beta\cdot a_1)}{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\beta^{n-1}\cdot(1-0)-\alpha^{n-1}\cdot(1-0)}{\beta-\alpha} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right\} \end{aligned}$$

$n=1$ のとき, $a_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(1-1)=0$ より, $n=1$ のときも成立する．

$$\therefore \quad \boldsymbol{a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right\}} \quad (\,\boldsymbol{n=1,2,3,\cdots}\,)$$