反射テスト　数列　漸化式　まとめ　01

1.　次の数列の一般項を求めよ．ただし $n = 1, 2, 3, \cdots$ とする．（ S 級 2 分 20 秒，A 級 3 分 35 秒，B 級 5 分，C 級 7 分 ）

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = 2a_n + 2\left\{2^n - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\} \end{cases}$$

2. 次の数列の一般項を求めよ. ただし $n = 1, 2, 3, \cdots$ とする. (S 級 2 分 20 秒, A 級 3 分 35 秒, B 級 5 分, C 級 7 分)

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = \dfrac{2}{3}a_n + \dfrac{2}{3}\left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\} \end{cases}$$

反射テスト　数列　漸化式　まとめ　01　解答解説

1.　次の数列の一般項を求めよ．ただし $n=1,2,3,\cdots$ とする．(S 級 2 分 20 秒, A 級 3 分 35 秒, B 級 5 分, C 級 7 分)

$$\begin{cases} a_1 = 0 & \cdots ① \\ a_{n+1} = 2a_n + 2\left\{2^n - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\} & \cdots ② \end{cases}$$

②の両辺を 2^{n+1} で割ると，

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$b_n = \dfrac{a_n}{2^n}$　($n=1,2,3,\cdots$)　とおくと，$b_1 = \dfrac{a_1}{2} = 0$ かつ，

$$b_{n+1} = b_n + 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

以上から，

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left\{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^k\right\} \\ &= 0 + (n-1) - \frac{1}{4}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{4}} \\ &= n - 1 - \frac{1}{3}\left\{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\} \\ &= n - \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\quad a_n &= 2^n \cdot b_n \\ &= \boldsymbol{\left(n - \frac{4}{3}\right)\cdot 2^n + \frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n} \end{aligned}$$

★ 漸化式 $a_{n+1} = ta_n + f(n)$ の形

両辺を t^{n+1}で割り，$\dfrac{a_{n+1}}{t^{n+1}} = \dfrac{a_n}{t^n} + \dfrac{f(n)}{t^{n+1}}$

$b_n = \dfrac{a_n}{t^n}$ とおくと，$b_{n+1} = b_n + \dfrac{f(n)}{t^{n+1}}$

となるので，$b_n = b_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f(k)}{t^{k+1}}$

☆見直し

漸化式から，$a_1 = 0 \Rightarrow a_2 = 2\cdot 0 + 2\left(2 - \dfrac{1}{2}\right) = 3$

一般項から，$a_1 = -\dfrac{1}{3}\cdot 2 + \dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{1}{2} = 0$

$a_2 = \dfrac{2}{3}\cdot 4 + \dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{1}{4} = 3$

2. 次の数列の一般項を求めよ．ただし $n=1,2,3,\cdots$ とする．(S 級 2 分 20 秒，A 級 3 分 35 秒，B 級 5 分，C 級 7 分)

$$\begin{cases} a_1 = 0 & \cdots ① \\ a_{n+1} = \dfrac{2}{3}a_n + \dfrac{2}{3}\left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\} & \cdots ② \end{cases}$$

②の両辺を $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}$ で割ると，

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \cdot a_{n+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot a_n + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$b_n = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n \cdot a_n$ ($n=1,2,3,\cdots$) とおくと，$b_1 = \dfrac{3}{2} \cdot a_1 = 0$ かつ，

$$b_{n+1} = b_n + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

以上から，

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right\} \\ &= 0 + (n-1) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= n - 1 - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= n - 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad a_n &= \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot b_n \\ &= \boldsymbol{(n-2) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n} \end{aligned}$$

★ 漸化式 $a_{n+1} = ta_n + f(n)$ の形

両辺を t^{n+1}で割り，$\dfrac{a_{n+1}}{t^{n+1}} = \dfrac{a_n}{t^n} + \dfrac{f(n)}{t^{n+1}}$

$b_n = \dfrac{a_n}{t^n}$ とおくと，$b_{n+1} = b_n + \dfrac{f(n)}{t^{n+1}}$

となるので，$b_n = b_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{f(k)}{t^{k+1}}$

☆見直し

漸化式から，$a_1 = 0 \Rightarrow a_2 = \dfrac{2}{3} \cdot 0 + \dfrac{2}{3} \cdot \left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{2}{9}$

一般項から，$a_1 = -1 \cdot \dfrac{2}{3} + 2 \cdot \dfrac{1}{3} = 0$

$a_2 = 0 \cdot \dfrac{4}{9} + 2 \cdot \dfrac{1}{9} = \dfrac{2}{9}$