反射テスト　数列　漸化式　逆数を考える　01

1.　次の数列の一般項を求めよ. ただし $n = 1, 2, 3, \cdots$ とする.（ S 級 2 分, A 級 3 分, B 級 4 分 20 秒, C 級 6 分 ）

(1)　$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{3a_n}{3 + a_n} \end{cases}$

(2)　$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2 + a_n} \end{cases}$

2. 次の数列の一般項を求めよ. ただし $n = 1, 2, 3, \cdots$ とする.（ S 級 2 分, A 級 3 分, B 級 4 分 20 秒, C 級 6 分 ）

(1) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{2 + a_n} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{2} \\ a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{1 + a_n} \end{cases}$

反射テスト　数列　漸化式　逆数を考える　01　解答解説

1.　次の数列の一般項を求めよ. ただし $n=1,2,3,\cdots$ とする.（ S 級 2 分, A 級 3 分, B 級 4 分 20 秒, C 級 6 分 ）

(1)　$\begin{cases} a_1 = 1 & \cdots ① \\ a_{n+1} = \dfrac{3a_n}{3+a_n} & \cdots ② \end{cases}$

題意から $a_n \neq 0$ である. なぜならば, もしある自然数 k に対して, $a_k = 0$ ならば, ②から a_{k-1} も 0 となり, 以下 $a_k = a_{k-1} = a_{k-2} = a_{k-3} = \cdots = a_1 = 0$ となる. しかし, これは①に矛盾する. (★背理法)

$a_n \neq 0$ から, ②の両辺の逆数をとると,

$\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{3+a_n}{3a_n} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{3}$

よって, 数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ は公差 $\dfrac{1}{3}$ の等差数列である. 初項は　$\dfrac{1}{a_1} = \dfrac{1}{1} = 1$

$\therefore \quad \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{3}(n-1)$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{a_n} = 1 + \dfrac{1}{3}(n-1)$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{n+2}{3}$

$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a_n = \dfrac{3}{n+2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)}$

(2)　$\begin{cases} a_1 = 1 & \cdots ① \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2+a_n} & \cdots ② \end{cases}$

題意から $a_n \neq 0$ である. なぜならば, もしある自然数 k に対して, $a_k = 0$ ならば, ②から a_{k-1} も 0 となり, 以下 $a_k = a_{k-1} = a_{k-2} = a_{k-3} = \cdots = a_1 = 0$ となる. しかし, これは①に矛盾する. (★背理法)

$a_n \neq 0$ から, ②の両辺の逆数をとると,

$\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{2+a_n}{a_n} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{2}{a_n} + 1$

この式は, 特性方程式 $x = 2x + 1 \Leftrightarrow x = -1$ より, 次のように変形できる.

$\dfrac{1}{a_{n+1}} - (-1) = 2\left\{\dfrac{1}{a_n} - (-1)\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{a_{n+1}} + 1 = 2\left(\dfrac{1}{a_n} + 1\right)$

よって, 数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n} + 1\right\}$ は公比 2 の等比数列である. 初項は　$\dfrac{1}{a_1} + 1 = \dfrac{1}{1} + 1 = 2$

$\therefore \quad \dfrac{1}{a_n} + 1 = \left(\dfrac{1}{a_1} + 1\right) \cdot 2^{n-1}$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{a_n} = 2^n - 1$

$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{2^n - 1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)}$

2. 次の数列の一般項を求めよ．ただし $n=1,2,3,\cdots$ とする．(S 級 2 分, A 級 3 分, B 級 4 分 20 秒, C 級 6 分)

(1) $\begin{cases} a_1 = 2 & \cdots① \\ a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{2+a_n} & \cdots② \end{cases}$

題意から $a_n \neq 0$ である．なぜならば，もしある自然数kに対して， $a_k=0$ ならば，②から a_{k-1} も 0 となり，以下 $a_k=a_{k-1}=a_{k-2}=a_{k-3}=\cdots=a_1=0$ となる．しかし，これは①に矛盾する．(★背理法)

$a_n \neq 0$ から，②の両辺の逆数をとると，
$\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{2+a_n}{2a_n} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{2}$
よって，数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ は公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列である．初項は $\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \quad \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{2}(n-1)$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{2}n$

$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a_n = \dfrac{2}{n} \quad (n=1,2,3,\cdots)}$

(2) $\begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{2} & \cdots① \\ a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{1+a_n} & \cdots② \end{cases}$

題意から $a_n \neq 0$ である．なぜならば，もしある自然数kに対して， $a_k=0$ ならば，②から a_{k-1} も 0 となり，以下 $a_k=a_{k-1}=a_{k-2}=a_{k-3}=\cdots=a_1=0$ となる．しかし，これは①に矛盾する．(★背理法)

$a_n \neq 0$ から，②の両辺の逆数をとると，
$\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{1+a_n}{2a_n} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{2}$
この式は，特性方程式 $x=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=1$ より，次のように変形できる．
$\dfrac{1}{a_{n+1}} - 1 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a_n}-1\right)$
よって，数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}-1\right\}$ は公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列である．初項は $\dfrac{1}{a_1}-1=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}-1=1$

$\therefore \quad \dfrac{1}{a_n} - 1 = \left(\dfrac{1}{a_1}-1\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{a_n} = 1\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+1$

$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+1}}$

$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a_n = \dfrac{2^{n-1}}{2^{n-1}+1} \quad (n=1,2,3,\cdots)}$