

反射テスト 数列 漸化式 部分分数分解 01

1. 次の数列の一般項を求めよ. ただし $n = 1, 2, 3, \dots$ とする. (S 級 2 分 20 秒, A 級 3 分, B 級 4 分, C 級 5 分 30 秒)

$$(1) \quad \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n(n+1)} \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{4n^2 - 1} \end{cases}$$

2. 次の数列の一般項を求めよ. ただし $n = 1, 2, 3, \dots$ とする. (S 級 2 分 40 秒, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分, C 級 7 分)

$$(1) \quad \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n^2 + 3n + 2} \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n^2 + 2n} \end{cases}$$

反射テスト 数列 漸化式 部分分数分解 01 解答解説

1. 次の数列の一般項を求めよ. ただし $n = 1, 2, 3, \dots$ とする. (S 級 2 分 20 秒, A 級 3 分, B 級 4 分, C 級 5 分 30 秒)

★ 部分分数分解 次の式変形を 部分分数分解 という. A と B はいざとなれば恒等式として導く.

$$\frac{1}{(a_1x + a_2)(b_1x + b_2)} = \frac{A}{a_1x + a_2} + \frac{B}{b_1x + b_2}$$

$$(1) \quad \begin{cases} a_1 = 1 & \dots \textcircled{1} \\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n(n+1)} & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{(n+1) - n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad \leftarrow \star \text{部分分数分解}$$

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \\ a_{n-1} - a_{n-2} &= \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} \\ a_{n-2} - a_{n-3} &= \frac{1}{n-3} - \frac{1}{n-2} \\ \dots &= \dots \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} +) & a_2 - a_1 & = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \\ \hline & a_n - a_1 & = \frac{1}{1} - \frac{1}{n} \quad \leftarrow \text{両辺の和をとった} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow a_n &= a_1 + 1 - \frac{1}{n} \\ &= 2 - \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \leftarrow \textcircled{1} \text{を代入した} \\ &= \frac{2n-1}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{cases} a_1 = 2 & \dots \textcircled{1} \\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{4n^2 - 1} & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \times \frac{(2n+1) - (2n-1)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \quad \leftarrow \star \text{部分分数分解}$$

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1} \right) \\ a_{n-1} - a_{n-2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-5} - \frac{1}{2n-3} \right) \\ a_{n-2} - a_{n-3} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-7} - \frac{1}{2n-5} \right) \\ \dots &= \dots \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} +) & a_2 - a_1 & = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2 \cdot 1 - 1} - \frac{1}{2 \cdot 2 - 1} \right) \\ \hline & a_n - a_1 & = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2n-1} \right) \quad \leftarrow \text{両辺の和をとった} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow a_n &= a_1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n-1} \right) \\ &= \frac{5}{2} - \frac{1}{2(2n-1)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \leftarrow \textcircled{1} \text{を代入した} \\ &= \frac{5n-3}{2n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

☆ 確かめ (1, 2, 3 で考えろ)

n	1	2	3
a_n (漸化式)	2	$2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$	$\frac{7}{3} + \frac{1}{15} = \frac{12}{5}$
$\frac{5}{2} - \frac{1}{2(2n-1)}$	2	$\frac{5}{2} - \frac{1}{6} = \frac{7}{3}$	$\frac{5}{2} - \frac{1}{10} = \frac{12}{5}$

2. 次の数列の一般項を求めよ. ただし $n = 1, 2, 3, \dots$ とする. (S 級 2 分 40 秒, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分, C 級 7 分)

$$(1) \quad \begin{cases} a_1 = 0 & \dots \textcircled{1} \\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n^2 + 3n + 2} & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+2) - (n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \quad \leftarrow \star \text{部分分数分解}$$

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ a_{n-1} - a_{n-2} &= \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \\ a_{n-2} - a_{n-3} &= \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} \\ \dots &= \dots \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} +) & a_2 - a_1 & = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ \hline & a_n - a_1 & = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \quad \leftarrow \text{両辺の和をとった} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow a_n &= a_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \leftarrow \textcircled{1} \text{を代入した} \\ &= \frac{n-1}{2(n+1)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{cases} a_1 = 1 & \dots \textcircled{1} \\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n^2 + 2n} & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \times \frac{(n+2) - n}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \quad \leftarrow \star \text{部分分数分解}$$

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) \\ a_{n-1} - a_{n-2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} \right) \\ a_{n-2} - a_{n-3} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n-1} \right) \\ a_{n-3} - a_{n-4} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-4} - \frac{1}{n-2} \right) \\ \dots &= \dots \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} & a_4 - a_3 & = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \\ & a_3 - a_2 & = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \\ +) & a_2 - a_1 & = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) \\ \hline & a_n - a_1 & = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \quad \leftarrow \text{両辺の和をとった} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow a_n &= a_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{7}{4} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \leftarrow \textcircled{1} \text{を代入した} \\ &= \frac{7n^2 + 3n - 2}{4n(n+1)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

☆ 確かめ (1, 2, 3 で考えろ)

n	1	2	3
a_n (漸化式)	1	$1 + \frac{1}{1^2+2 \cdot 1} = \frac{4}{3}$	$\frac{4}{3} + \frac{1}{2^2+2 \cdot 2} = \frac{35}{24}$
$\frac{7}{4} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)}$	$\frac{7}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 1$	$\frac{7}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{4}{3}$	$\frac{7}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{35}{24}$