

反射テスト 数列 漸化式 特性方程式 03 隣接3項間漸化式

1. $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, 次の条件を満たす一般項 a_n を求めよ. ただし $n = 1, 2, 3$ のときについての確かめもせよ.
(S 級 2 分 20 秒, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分, C 級 8 分)

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 3 \\ a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n \end{cases}$$

2. $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, 次の条件を満たす一般項 a_n を求めよ. ただし $n = 1, 2, 3$ のときについての確かめもせよ.
(S 級 2 分 30 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 10 分)

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 5 \\ a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n \end{cases}$$

反射テスト 数列 漸化式 特性方程式 03 隣接3項間漸化式 解答解説

1. $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、次の条件を満たす一般項 a_n を求めよ。ただし $n = 1, 2, 3$ のときについての確かめもせよ。
(S 級 2 分 20 秒, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分, C 級 8 分)

$$\begin{cases} a_1 = 2 & \dots \textcircled{1} \\ a_2 = 3 & \dots \textcircled{2} \\ a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

★ 隣接3項間漸化式の特性方程式は2次方程式

④ $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n \Rightarrow$ 特性方程式 $x^2 = px + q$ を解く。

⑤ 特性方程式の解が $x = \alpha, \beta$ であれば次の2つが成立する。

i) 数列 $\{a_{n+1} - \alpha a_n\}$ は、公比 β の等比数列。

ii) 数列 $\{a_{n+1} - \beta a_n\}$ は、公比 α の等比数列。

証明

特性方程式 $x^2 = px + q \Leftrightarrow x^2 - px - q = 0$ の解を $x = \alpha, \beta$ とすると、
解と係数の関係から、 $p = \alpha + \beta, -q = \alpha\beta$ 。 $\dots \textcircled{7}$

一方、隣接3項間漸化式 ④ を $a_{n+2} - sa_{n+1} = t(a_{n+1} - sa_n)$ の形にしたい。 $\leftarrow$ 数列 $\{a_{n+1} - sa_n\}$ は、公比 t の等比数列。
この式を整理すると、 $a_{n+2} = (s+t)a_{n+1} - sta_n$ である。

これと漸化式 ④ との係数を比較すれば、 $p = s+t, q = -st$ である。 $\dots \textcircled{4}$

⑦ と ④ から、 $(\alpha, \beta) = (s, t)$ 又は (t, s) 。

解答

漸化式 ③ の特性方程式は、 $x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x = 1, 2$

③ $\Leftrightarrow a_{n+2} - 2a_{n+1} = 1(a_{n+1} - 2a_n) \leftarrow$ 数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ は公比 1 の等比数列。

$$\begin{aligned} \therefore a_{n+1} - 2a_n &= 1^{n-1}(a_2 - 2a_1) \\ &= 3 - 2 \times 2 = -1 \quad \leftarrow \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{を代入。} \end{aligned}$$

次に、この漸化式 $a_{n+1} - 2a_n = -1 \Leftrightarrow a_{n+1} = 2a_n - 1$ を考える。

この漸化式の特性方程式は、 $y - 2y = -1 \Leftrightarrow y = 1$

$\therefore a_{n+1} - 1 = 2(a_n - 1) \leftarrow$ 数列 $\{a_n - 1\}$ は公比 2 の等比数列。

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_n - 1 &= 2^{n-1}(a_1 - 1) \\ &= 2^{n-1} \times (2 - 1) \\ &= 2^{n-1} \quad \leftarrow \textcircled{1} \text{を代入。} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow a_n = 2^{n-1} + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

これは次のように $n = 1, 2, 3, \dots$ で成立する。

☆確かめ (★ 1, 2, 3, ... で考えろ。)

n	1	2	3
a_n (漸化式)	2	3	$3 \times 3 - 2 \times 2 = 5$
$2^{n-1} + 1$	$2^0 + 1 = 2$	$2^1 + 1 = 3$	$2^2 + 1 = 5$

別解 (この方法の方が早い)

★ の i) を用いると、 $a_{n+1} - 2a_n = 1^{n-1}(a_2 - 2a_1) = 3 - 2 \times 2 = -1 \Rightarrow a_{n+1} = 2a_n - 1$

★ の ii) を用いると、 $a_{n+1} - a_n = 2^{n-1}(a_2 - a_1) = 2^{n-1} \times (3 - 2) = 2^{n-1} \Rightarrow a_{n+1} = a_n + 2^{n-1}$

この2つの結論を連立方程式と考えて、 a_{n+1} を消去し a_n について解けば、 $a_n = 2^{n-1} + 1$

2. $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、次の条件を満たす一般項 a_n を求めよ。ただし $n = 1, 2, 3$ のときについての確かめもせよ。
 (S 級 2 分 30 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 10 分)

$$\begin{cases} a_1 = 1 & \cdots \textcircled{1} \\ a_2 = 5 & \cdots \textcircled{2} \\ a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

解答

★隣接 3 項間漸化式の特性方程式は 2 次方程式

漸化式 ③ の特性方程式は、 $x^2 = 5x - 6 \Leftrightarrow x = 2, 3$

$$\textcircled{3} \quad \Leftrightarrow \quad a_{n+2} - 3a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 3a_n) \quad \leftarrow \text{数列 } \{a_{n+1} - 3a_n\} \text{ は公比 } 2 \text{ の等比数列.}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad a_{n+1} - 3a_n &= 2^{n-1}(a_2 - 3a_1) \\ &= 2^{n-1}(5 - 3 \times 1) = 2^n \quad \leftarrow \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ を代入.} \end{aligned}$$

$$\text{よって,} \quad a_{n+1} - 3a_n = 2^n \quad \cdots \textcircled{4}$$

また、同様にして、

$$\textcircled{3} \quad \Leftrightarrow \quad a_{n+2} - 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 2a_n) \quad \leftarrow \text{数列 } \{a_{n+1} - 2a_n\} \text{ は公比 } 3 \text{ の等比数列.}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad a_{n+1} - 2a_n &= 3^{n-1}(a_2 - 2a_1) \\ &= 3^{n-1}(5 - 2 \times 1) = 3^n \quad \leftarrow \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ を代入.} \end{aligned}$$

$$\text{よって,} \quad a_{n+1} - 2a_n = 3^n \quad \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4} \text{ と } \textcircled{5} \text{ の連立方程式を } a_n \text{ について解くと,} \quad a_n = 3^n - 2^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

これは次のように $n = 1, 2, 3, \dots$ で成立する。

☆確かめ (★1, 2, 3, … で考えろ。)

n	1	2	3
a_n (漸化式)	1	5	$5 \times 5 - 6 \times 1 = 19$
$3^n - 2^n$	$3^1 - 2^1 = 1$	$3^2 - 2^2 = 5$	$3^3 - 2^3 = 19$

★このように、隣接 3 項間漸化式の一般項は、**2 つの等比数列** によって表される。

上のように連立方程式として考えれば、難しくはない。