

反射テスト 数列 漸化式 特性方程式 02

1. 次の数列の一般項を求めよ. ただし $n = 1, 2, 3, \dots$ とする. (S 級 2 分 40 秒, A 級 4 分, B 級 5 分 30 秒, C 級 7 分)

$$(1) \quad \begin{cases} a_1 = 2 \\ 2a_{n+1} + a_n = 1 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = 4a_n + 2^n \end{cases}$$

2. 次の数列の一般項を求めよ. ただし $n = 1, 2, 3, \dots$ とする. (S 級 2 分 10 秒, A 級 3 分, B 級 4 分 20 秒, C 級 6 分)

$$(1) \quad \begin{cases} a_1 = 1 \\ 3a_{n+1} + a_n = 1 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = -2a_n + 2^{n+2} \end{cases}$$

反射テスト 数列 漸化式 特性方程式 02 解答解説

1. 次の数列の一般項を求めよ. ただし $n = 1, 2, 3, \dots$ とする. (S 級 2 分 40 秒, A 級 4 分, B 級 5 分 30 秒, C 級 7 分)

$$(1) \quad \begin{cases} a_1 = 2 & \cdots \textcircled{1} \\ 2a_{n+1} + a_n = 1 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

数列 $\{a_n\}$ の特性方程式は, $2x + x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \Leftrightarrow a_{n+1} - \frac{1}{3} &= -\frac{1}{2} \left(a_n - \frac{1}{3} \right) \quad \leftarrow \text{数列} \left\{ a_n - \frac{1}{3} \right\} \text{ は公比} -\frac{1}{2} \text{ の等比数列} \\ \therefore a_n - \frac{1}{3} &= \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \left(a_1 - \frac{1}{3} \right) \\ \Rightarrow a_n - \frac{1}{3} &= \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \left(2 - \frac{1}{3} \right) \quad \leftarrow \textcircled{1} \text{ を代入} \\ \Leftrightarrow a_n &= \frac{5}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} + \frac{1}{3} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{cases} a_1 = 4 & \cdots \textcircled{1} \\ a_{n+1} = 4a_n + 2^n & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = 2 \cdot \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2} \quad \leftarrow \text{両辺} \div 2^{n+1}$$

数列 $\left\{ \frac{a_n}{2^n} \right\}$ の特性方程式は, $x = 2x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} &= 2 \left(\frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2} \right) \quad \leftarrow \text{数列} \left\{ \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2} \right\} \text{ は公比} 2 \text{ の等比数列} \\ \therefore \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2} &= 2^{n-1} \left(\frac{a_1}{2^1} + \frac{1}{2} \right) \\ \Rightarrow \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2} &= 2^{n-1} \left(\frac{4}{2} + \frac{1}{2} \right) \quad \leftarrow \textcircled{1} \text{ を代入} \\ \Leftrightarrow \frac{a_n}{2^n} &= \frac{5}{2} \cdot 2^{n-1} - \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow a_n &= 2^n \cdot \frac{5}{2} \cdot 2^{n-1} - 2^{n-1} \\ \Leftrightarrow a_n &= 5 \cdot 4^{n-1} - 2^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

☆確かめ (1, 2, 3 で考えろ)

$n = 1, 2, 3, \dots$ で確かめる.

n	1	2	3
a_n (漸化式)	4	18	76
$5 \cdot 4^{n-1} - 2^{n-1}$	4	18	76

2. 次の数列の一般項を求めよ. ただし $n = 1, 2, 3, \dots$ とする. (S 級 2 分 10 秒, A 級 3 分, B 級 4 分 20 秒, C 級 6 分)

$$(1) \quad \begin{cases} a_1 = 1 & \cdots \textcircled{1} \\ 3a_{n+1} + a_n = 1 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

数列 $\{a_n\}$ の特性方程式は, $3x + x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow a_{n+1} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3} \left(a_n - \frac{1}{4} \right) \quad \leftarrow \text{数列} \left\{ a_n - \frac{1}{4} \right\} \text{ は公比} -\frac{1}{3} \text{ の等比数列}$$

$$\therefore a_n - \frac{1}{4} = \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} \left(a_1 - \frac{1}{4} \right)$$

$$\Rightarrow a_n - \frac{1}{4} = \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{4} \right) \quad \leftarrow \textcircled{1} \text{ を代入}$$

$$\Leftrightarrow a_n = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} + \frac{1}{4} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$(2) \quad \begin{cases} a_1 = 4 & \cdots \textcircled{1} \\ a_{n+1} = -2a_n + 2^{n+2} & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = -\frac{a_n}{2^n} + 2 \quad \leftarrow \text{両辺} \div 2^{n+1}$$

数列 $\left\{ \frac{a_n}{2^n} \right\}$ の特性方程式は, $x = -x + 2 \Leftrightarrow x = 1$

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - 1 = -\left(\frac{a_n}{2^n} - 1 \right) \quad \leftarrow \text{数列} \left\{ \frac{a_n}{2^n} - 1 \right\} \text{ は公比} -1 \text{ の等比数列}$$

$$\therefore \frac{a_n}{2^n} - 1 = (-1)^{n-1} \left(\frac{a_1}{2^1} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{a_n}{2^n} - 1 = (-1)^{n-1} \left(\frac{4}{2} - 1 \right) \quad \leftarrow \textcircled{1} \text{ を代入}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_n}{2^n} = (-1)^{n-1} + 1$$

$$\Leftrightarrow a_n = 2^n \cdot \left\{ (-1)^{n-1} + 1 \right\}$$

$$\Leftrightarrow a_n = 2^n - (-2)^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

☆確かめ (1, 2, 3 で考えろ)

$n = 1, 2, 3, \dots$ で確かめる.

n	1	2	3
a_n (漸化式)	4	0	16
$2^n - (-2)^n$	4	0	16