

反射テスト 数列 漸化式 特性方程式 01

1. 次の数列の一般項を求めよ. ただし $n = 1, 2, 3, \dots$ とする. (S 級 1 分, A 級 1 分 40 秒, B 級 2 分 40 秒, C 級 4 分)

$$(1) \quad \begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = 2a_n - 2 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 2 \end{cases}$$

2. 次の数列の一般項を求めよ. ただし $n = 1, 2, 3, \dots$ とする. (S 級 1 分, A 級 1 分 40 秒, B 級 2 分 40 秒, C 級 4 分)

$$(1) \quad \begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = 3a_n - 4 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + 3 \end{cases}$$

反射テスト 数列 漸化式 特性方程式 01 解答解説

1. 次の数列の一般項を求めよ. ただし $n = 1, 2, 3, \dots$ とする. (S 級 1 分, A 級 1 分 40 秒, B 級 2 分 40 秒, C 級 4 分)

$$(1) \quad \begin{cases} a_1 = 3 & \cdots \textcircled{1} \\ a_{n+1} = 2a_n - 2 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

数列 $\{a_n\}$ の特性方程式は, $x = 2x - 2 \Leftrightarrow x = 2$

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow a_{n+1} - 2 = 2 \cdot (a_n - 2) \quad \leftarrow \text{数列 } \{a_n - 2\} \text{ は公比 } 2 \text{ の等比数列.}$$

$$\therefore a_n - 2 = 2^{n-1}(a_1 - 2)$$

$$\Rightarrow a_n - 2 = 2^{n-1} \cdot (3 - 2) \quad \leftarrow \textcircled{1} \text{ を代入}$$

$$\Leftrightarrow a_n = 2^{n-1} + 2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

☆確かめ (★ 1, 2, 3, … で考えろ.)

n	1	2	3
a_n (漸化式)	3	$2 \cdot 3 - 2 = 4$	$2 \cdot 4 - 2 = 6$
$2^{n-1} + 2$	$2^{1-1} + 2 = 3$	$2^{2-1} + 2 = 4$	$2^{3-1} + 2 = 6$

$$(2) \quad \begin{cases} a_1 = 1 & \cdots \textcircled{1} \\ a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 2 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

数列 $\{a_n\}$ の特性方程式は, $x = \frac{1}{3}x + 2 \Leftrightarrow x = 3$

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow a_{n+1} - 3 = \frac{1}{3} \cdot (a_n - 3) \quad \leftarrow \text{数列 } \{a_n - 3\} \text{ は公比 } \frac{1}{3} \text{ の等比数列}$$

$$\therefore a_n - 3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(a_1 - 3)$$

$$\Rightarrow a_n - 3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot (1 - 3) \quad \leftarrow \textcircled{1} \text{ を代入}$$

$$\Leftrightarrow a_n = -2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 3 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

☆確かめ (★ 1, 2, 3, … で考えろ.)

n	1	2	3
a_n (漸化式)	1	$\frac{1}{3} \cdot 1 + 2 = \frac{7}{3}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{7}{3} + 2 = \frac{25}{9}$
$-\frac{2}{3^{n-1}} + 3$	$-\frac{2}{3^{1-1}} + 3 = 1$	$-\frac{2}{3^{2-1}} + 3 = \frac{7}{3}$	$-\frac{2}{3^{3-1}} + 3 = \frac{25}{9}$

2. 次の数列の一般項を求めよ. ただし $n = 1, 2, 3, \dots$ とする. (S 級 1 分, A 級 1 分 40 秒, B 級 2 分 40 秒, C 級 4 分)

$$(1) \quad \begin{cases} a_1 = 5 & \cdots \textcircled{1} \\ a_{n+1} = 3a_n - 4 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

数列 $\{a_n\}$ の特性方程式は, $x = 3x - 4 \Leftrightarrow x = 2$

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow a_{n+1} - 2 = 3 \cdot (a_n - 2) \quad \leftarrow \text{数列 } \{a_n - 2\} \text{ は公比 } 3 \text{ の等比数列}$$

$$\therefore a_n - 2 = 3^{n-1}(a_1 - 2)$$

$$\Rightarrow a_n - 2 = 3^{n-1} \cdot (5 - 2) \quad \leftarrow \textcircled{1} \text{ を代入}$$

$$\Leftrightarrow a_n = 3^n + 2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

☆確かめ (★ 1, 2, 3, ... で考えろ.)

n	1	2	3
a_n (漸化式)	5	$3 \cdot 5 - 4 = 11$	$3 \cdot 11 - 4 = 29$
$3^n + 2$	$3^1 + 2 = 5$	$3^2 + 2 = 11$	$3^3 + 2 = 29$

$$(2) \quad \begin{cases} a_1 = 3 & \cdots \textcircled{1} \\ a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + 3 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

数列 $\{a_n\}$ の特性方程式は, $x = \frac{1}{4}x + 3 \Leftrightarrow x = 4$

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow a_{n+1} - 4 = \frac{1}{4} \cdot (a_n - 4) \quad \leftarrow \text{数列 } \{a_n - 4\} \text{ は公比 } \frac{1}{4} \text{ の等比数列}$$

$$\therefore a_n - 4 = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}(a_1 - 4)$$

$$\Rightarrow a_n - 4 = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \cdot (3 - 4) \quad \leftarrow \textcircled{1} \text{ を代入}$$

$$\Leftrightarrow a_n = -\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + 4 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\Leftrightarrow a_n = -\frac{1}{4^{n-1}} + 4 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

☆確かめ (★ 1, 2, 3, ... で考えろ.)

n	1	2	3
a_n (漸化式)	3	$\frac{1}{4} \cdot 3 + 3 = \frac{13}{4}$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{13}{4} + 3 = \frac{61}{16}$
$-\frac{1}{4^{n-1}} + 4$	$-\frac{1}{4^{1-1}} + 4 = 3$	$-\frac{1}{4^{2-1}} + 4 = \frac{13}{4}$	$-\frac{1}{4^{3-1}} + 4 = \frac{61}{16}$