

反射テスト 数列 Σ 公式 03

1. n を自然数として、次の計算をせよ. ただし答えはできるだけ因数分解すること.

(S 級 1 分 20 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分)

(1)
$$\sum_{k=1}^n k(k^2 + 1)$$

(2)
$$\sum_{k=n-s}^n (k + s) \quad (\text{ただし } s \text{ は } n \text{ 以下のある自然数})$$

2. n を自然数として、次の計算をせよ。ただし答えはできるだけ因数分解すること。

(S 級 1 分 40 秒, A 級 3 分 30 秒, B 級 6 分, C 級 9 分)

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n k(k+1)(k-1)$$

$$(2) \quad \sum_{k=n-s}^{n+s} (n+k+s) \quad (\text{ただし } s \text{ は } n \text{ 以下のある自然数})$$

反射テスト 数列 Σ 公式 03 解答解説

1. n を自然数として、次の計算をせよ。ただし答えはできるだけ因数分解すること。

(S 級 1 分 20 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分)

★ Σ 公式

$$\sum_{k=1}^n 1 = n \quad \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n k(k^2 + 1)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^n (k^3 + k) \\ &= \sum_{k=1}^n k^3 + \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n^2(n+1)^2 + 2n(n+1)}{4} \\ &= \frac{n(n+1)\{n(n+1) + 2\}}{4} \\ &= \frac{n(n+1)(n^2 + n + 2)}{4} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

$$(2) \quad \sum_{k=n-s}^n (k + s) \quad (\text{ただし } s \text{ は } n \text{ 以下のある自然数})$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=n-s}^n k + \sum_{k=n-s}^n s \\ &= \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^{n-s-1} k + s \sum_{k=n-s}^n 1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-s-1)(n-s)}{2} + s(s+1) \quad \leftarrow \star \\ &= \frac{n^2 + n - (n-s)^2 + (n-s) + 2s(s+1)}{2} \\ &= \frac{n^2 + n - n^2 + 2sn - s^2 + n - s + 2s^2 + 2s}{2} \\ &= \frac{2n + 2sn + s^2 + s}{2} \\ &= \frac{(2n+s)(s+1)}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

☆ $\sum_{k=n-s}^n s$ の s は k に依存しない定数と考えられる。

項数は、 $n - (n-s) + 1 = s+1$

☆別解 $(k+s)$ は k の 1 次式なので等差数列

★等差数列の和 = $\frac{(\text{初項} + \text{末項}) \times \text{項数}}{2}$

$$\therefore \sum_{k=n-s}^n k = \frac{[(n-s) + s] + (n+s)}{2} \times (s+1) = \frac{(2n+s)(s+1)}{2}$$

こちらの方が圧倒的に早く正確。

2. n を自然数として、次の計算をせよ。ただし答えはできるだけ因数分解すること。

(S 級 1 分 40 秒, A 級 3 分 30 秒, B 級 6 分, C 級 9 分)

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n k(k+1)(k-1)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^n (k^3 - k) \\ &= \sum_{k=1}^n k^3 - \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n^2(n+1)^2 - 2n(n+1)}{4} \\ &= \frac{n(n+1)\{n(n+1) - 2\}}{4} \\ &= \frac{n(n+1)(n^2 + n - 2)}{4} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(n-1)}{4} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

$$(2) \quad \sum_{k=n-s}^{n+s} (n+k+s) \quad (\text{ただし } s \text{ は } n \text{ 以下のある自然数})$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=n-s}^{n+s} k + \sum_{k=n-s}^{n+s} (n+s) \\ &= \sum_{k=1}^{n+s} k - \sum_{k=1}^{n-s-1} k + (n+s) \sum_{k=n-s}^{n+s} 1 \\ &= \frac{(n+s)(n+s+1)}{2} - \frac{(n-s-1)(n-s)}{2} + (n+s)(2s+1) \quad \leftarrow \star \\ &= \frac{n^2 + 2ns + s^2 + n + s - n^2 + 2ns - s^2 + n - s}{2} + (n+s)(2s+1) \\ &= \frac{4ns + 2n}{2} + (n+s)(2s+1) \\ &= n(2s+1) + (n+s)(2s+1) \\ &= (2n+s)(2s+1) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

☆ $\sum_{k=n-s}^{n+s} (n+s)$ の $(n+s)$ は k に依存しない定数と考えられる。

項数は、 $(n+s) - (n-s) + 1 = 2s+1$

☆別解 $(n+k+s)$ は k の 1 次式なので等差数列

★等差数列の和 = $\frac{(\text{初項} + \text{末項}) \times \text{個数}}{2}$

$$\therefore \sum_{k=n-s}^{n+s} (n+k+s) = \frac{[\{n + (n-s) + s\} + \{n + (n+s) + s\}] \times (2s+1)}{2} = (2n+s)(2s+1)$$

こちらの方が圧倒的に早く正確。