反射テスト　数列　Σ 公式　02

1.　n を自然数として, 次の計算をせよ. ただし答えはできるだけ因数分解すること.

（ S 級 1 分 50 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分 ）

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(6k^2+2k+1\right)$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=n}^{2n}k$

(3)　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k^3+1)$

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2. nを自然数として, 次の計算をせよ. ただし答えはできるだけ因数分解すること.

(S 級 2 分 20 秒, A 級 4 分, B 級 6 分 30 秒, C 級 10 分)

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(3k^2-2k+1\right)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=n}^{3n-1}(2k+5)$

(3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(2k^3-1)$

ⓒ 数学・算数を楽しむために (http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html)

反射テスト　数列　Σ 公式　02　解答解説

1.　n を自然数として，次の計算をせよ．ただし答えはできるだけ因数分解すること．

（ S 級 1 分 50 秒，A 級 3 分，B 級 5 分，C 級 7 分 ）

★ Σ 公式

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} 1 = n \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(6k^2+2k+1\right)$

$$\begin{aligned}
&= 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \\
&= 6 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \times \frac{n(n+1)}{2} + n \\
&= n(n+1)(2n+1) + n(n+1) + n \\
&= n\{(n+1)(2n+1) + (n+1) + 1\} \\
&= n(2n^2 + 3n + 1 + n + 1 + 1) \\
&= \boldsymbol{n(2n^2+4n+3) \quad (\, n = 1, 2, 3, \cdots)}
\end{aligned}$$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} k$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{2n} k - \sum_{k=1}^{n-1} k \\
&= \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} \\
&= \frac{4n^2+2n-n^2+n}{2} \\
&= \boldsymbol{\frac{3n(n+1)}{2} \quad (\, n = 1, 2, 3, \cdots)}
\end{aligned}$$

☆別解

★等差数列の和 $= \dfrac{(\text{初項} + \text{末項}) \times \text{個数}}{2}$

$\therefore \quad \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} k = \frac{(n+2n) \times (n+1)}{2} = \frac{3n(n+1)}{2}$

こちらの方が圧倒的に早い．

(3)　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k^3+1)$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n} k^3 + \sum_{k=0}^{n} 1 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \boldsymbol{(n+1)} \quad \leftarrow ☆ \\
&= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)}{4} \\
&= \frac{(n+1)\{n^2(n+1)+4\}}{4} \\
&= \boldsymbol{\frac{(n+1)(n^3+n^2+4)}{4} \quad (\, n = 1, 2, 3, \cdots)}
\end{aligned}$$

☆ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1$ は項が $n-0+1 = n+1$ 個ある．

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2. nを自然数として，次の計算をせよ．ただし答えはできるだけ因数分解すること．

（S 級 2 分 20 秒，A 級 4 分，B 級 6 分 30 秒，C 級 10 分）

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(3k^2-2k+1\right)$

$$
\begin{aligned}
&=3\sum_{k=1}^{n}k^2-2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1\\
&=3\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-2\times\frac{n(n+1)}{2}+n\\
&=\frac{n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)+2n}{2}\\
&=\frac{n\{(n+1)(2n+1)-2(n+1)+2\}}{2}\\
&=\frac{n(2n^2+3n+1-2n-2+2)}{2}\\
&=\boldsymbol{\frac{n(2n^2+n+1)}{2}}\quad(\boldsymbol{n=1,2,3,\cdots})
\end{aligned}
$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=n}^{3n-1}(2k+5)$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{k=1}^{3n-1}(2k+5)-\sum_{k=1}^{n-1}(2k+5)\\
&=2\sum_{k=1}^{3n-1}k+5\sum_{k=1}^{3n-1}1-2\sum_{k=1}^{n-1}k-5\sum_{k=1}^{n-1}1\\
&=(3n-1)3n+5(3n-1)-(n-1)n-5(n-1)\\
&=9n^2-3n+15n-5-n^2+n-5n+5\\
&=8n^2+8n\\
&=\boldsymbol{8n(n+1)}\quad(\boldsymbol{n=1,2,3,\cdots})
\end{aligned}
$$

☆別解　$(2k+5)$ は k の 1 次式なので等差数列

項数は，$(3n-1)-n+1=2n$

★等差数列の和 $=\dfrac{(\text{初項}+\text{末項})\times\text{項数}}{2}$

$\therefore\ \displaystyle\sum_{k=n}^{3n-1}(2k+5)$

$$=\frac{[(2n+5)+\{2(3n-1)+5\}]\times 2n}{2}=8n(n+1)$$

こちらの方が圧倒的に早い．

(3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(2k^3-1)$

$$
\begin{aligned}
&=2\sum_{k=0}^{n-1}k^3-\sum_{k=0}^{n-1}1\\
&=2\times\frac{(n-1)^2n^2}{4}-\boldsymbol{n}\quad\leftarrow☆\\
&=\frac{n^2(n-1)^2-2n}{2}\\
&=\frac{n\{n(n-1)^2-2\}}{2}\\
&=\frac{n(n^3-2n^2+n-2)}{2}\\
&=\boldsymbol{\frac{n(n-2)(n^2+1)}{2}}\quad(\boldsymbol{n=1,2,3,\cdots})
\end{aligned}
$$

☆ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}1$ は項が $n-1-0+1=n$ 個ある．

ⓒ 数学・算数を楽しむために（http://www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html）