

反射テスト 数列 Σ 公式 01

1. n を自然数として、次の計算をせよ。ただし答えはできるだけ因数分解すること。

(S 級 1 分, A 級 2 分, B 級 3 分, C 級 4 分)

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n 5$$

$$(2) \quad \sum_{k=1}^n 2k$$

$$(3) \quad \sum_{k=1}^n k(k-1)$$

$$(4) \quad \sum_{k=1}^{n-1} k^3 \quad (n \text{ は } 2 \text{ 以上の整数})$$

2. n を自然数として, 次の計算をせよ. ただし答えはできるだけ因数分解すること.

(S 級 1 分 40 秒, A 級 3 分, B 級 4 分 20 秒, C 級 6 分)

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n (k-4)$$

$$(2) \quad \sum_{k=1}^n 3k^2$$

$$(3) \quad \sum_{k=1}^n k(k+1)(k-1)$$

$$(4) \quad \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) \quad (n \text{ は } 2 \text{ 以上の整数})$$

反射テスト 数列 Σ 公式 01 解答解説

1. n を自然数として、次の計算をせよ。ただし答えはできるだけ因数分解すること。

(S 級 1 分, A 級 2 分, B 級 3 分, C 級 4 分)

★ Σ 公式

$$\sum_{k=1}^n 1 = n \quad \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n 5$$

$$\begin{aligned} &= 5 \sum_{k=1}^n 1 \\ &= 5 \times n \\ &= 5n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

$$(2) \quad \sum_{k=1}^n 2k$$

$$\begin{aligned} &= 2 \sum_{k=1}^n k \\ &= 2 \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= n(n+1) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

☆ 確かめ (1, 2, 3 で考えろ)

$n = 1, 2, 3, \dots$ で確かめる。

n	1	2	3
5	5	5	5
合計	5	10	15
$5n$	5	10	15

☆ 確かめ

n	1	2	3
$2n$	2	4	6
合計	2	6	12
$n(n+1)$	2	6	12

$$(3) \quad \sum_{k=1}^n k(k-1)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^n (k^2 - k) \\ &= \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= n(n+1) \left\{ \frac{2n+1}{6} - \frac{1}{2} \right\} \\ &= \frac{n(n+1)(n-1)}{3} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

$$(4) \quad \sum_{k=1}^{n-1} k^3 \quad (n \text{ は } 2 \text{ 以上の整数})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(n-1)^2 \{(n-1)+1\}^2}{4} \\ &= \frac{n^2(n-1)^2}{4} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

☆ 確かめ

n	1	2	3
n^3	1	8	27
合計	1	9	36
$\frac{n^2(n-1)^2}{4}$	0	1	9

1, 2, 3, ..., $n-1$ までの和だからこれでよい。

☆ 確かめ

n	1	2	3
$n(n-1)$	0	2	6
合計	0	2	8
$\frac{n(n+1)(n-1)}{3}$	0	2	8

2. n を自然数として、次の計算をせよ。ただし答えはできるだけ因数分解すること。

(S 級 1 分 40 秒, A 級 3 分, B 級 4 分 20 秒, C 級 6 分)

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n (k-4)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^n k - 4 \sum_{k=1}^n 1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} - 4n \\ &= \frac{n(n-7)}{2} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

☆ 確かめ

n	1	2	3
$n-4$	-3	-2	-1
合計	-3	-5	-6
$\frac{n(n-7)}{2}$	-3	-5	-6

$$(2) \quad \sum_{k=1}^n 3k^2$$

$$\begin{aligned} &= 3 \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= 3 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

☆ 確かめ

n	1	2	3
$3n^2$	3	12	27
合計	3	15	42
$\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$	3	15	42

$$(3) \quad \sum_{k=1}^n k(k+1)(k-1)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^n (k^3 - k) \\ &= \sum_{k=1}^n k^3 - \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= n(n+1) \left\{ \frac{n(n+1)}{4} - \frac{1}{2} \right\} \\ &= \frac{n(n+1)(n^2+n-2)}{4} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(n-1)}{4} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

☆ 確かめ

n	1	2	3
$n(n+1)(n-1)$	0	6	24
合計	0	6	30
$\frac{n(n+1)(n+2)(n-1)}{4}$	0	6	30

$$(4) \quad \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) \quad (n \text{ は } 2 \text{ 以上の整数})$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= \frac{(n-1)\{(n-1)+1\}\{2(n-1)+1\}}{6} \\ &\quad + \frac{(n-1)\{(n-1)+1\}}{2} \\ &= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} \\ &= n(n-1) \times \left(\frac{2n-1}{6} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{n(n-1)(n+1)}{3} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

☆ 確かめ

n	1	2	3
$n(n+1)$	2	6	12
合計	2	8	20
$\frac{n(n-1)(n+1)}{3}$	0	2	8

1, 2, 3, ..., $n-1$ までの和だからこれでよい。

☆ 1(3) と同じ答えになる。理由を考えてみよう。