

反射テスト 数列 証明 数学的帰納法 01

1. 次の等式を数学的帰納法を用いて証明せよ. (S 級 2 分 50 秒, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 10 分)

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. 次の等式を数学的帰納法を用いて証明せよ. (*S* 級 3 分 40 秒, *A* 級 6 分, *B* 級 8 分 30 秒, *C* 級 12 分)

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

反射テスト 数列 証明 数学的帰納法 01 解答解説

1. 次の等式を数学的帰納法を用いて証明せよ。(S級 2分50秒, A級 5分, B級 7分, C級 10分)

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

★ 数学的帰納法 (*mathematical induction*)

自然数に関する命題 $P(n)$ が全ての n に対して成り立っている事を証明する方法.

① $P(1)$ が成り立つ事を示す.

② 任意の自然数 k に対して, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ が成り立つ事を示す.

以上から任意の自然数 n について $P(n)$ が成り立つ事を結論づける.

自然数に関する ★ ペアノの公理 の中に、ほぼ等価な話が出てくる (後述).

★ 証明 大学入試に使う証明のうち主なものは以下である. これらが的確に使えればほぼ問題ない.

① 演繹法 ② 背理法 ③ 数学的帰納法 ④ 対偶

① 演繹法 例: 三段論法 「 $A \Rightarrow B$ 」 かつ 「 $B \Rightarrow C$ 」 $\Rightarrow$ 「 $A \Rightarrow C$ 」

他に「鳩ノ巣論法」「転換法」や「白黒論法」なども一応あるが、上の4つが使えればほぼ大丈夫だろう.

この問題は「★ Σ 公式」の証明でもある.

証明

① $n = 1$ のとき, 左辺 = 1. 右辺 = $\frac{1(1+1)}{2} = 1$.

よって, $n = 1$ のとき, この等式は成立する.

② $n = k$ のとき, 等式が成り立つと仮定する.

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)\{(k+1)+1\}}{2}$$

以上から, $n = k$ のとき等式の成立を仮定すれば, $n = k+1$ のときも等式は成り立つ.

①, ② から数学的帰納法により, この等式は $n = 1, 2, 3, \cdots$ において成立する.

2. 次の等式を数学的帰納法を用いて証明せよ。(S級3分40秒, A級6分, B級8分30秒, C級12分)

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

証明

① $n = 1$ のとき, 左辺 $= 1^2 = 1$. 右辺 $= \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$.

よって, $n = 1$ のとき, この等式は成立する.

② $n = k$ のとき, 等式が成り立つと仮定する.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

$$\Leftrightarrow 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$\Leftrightarrow 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6}$$

$$\Leftrightarrow 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)\{k(2k+1) + 6(k+1)\}}{6}$$

$$\Leftrightarrow 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}$$

$$\Leftrightarrow 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\Leftrightarrow 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\}}{6}$$

以上から, $n = k$ のとき等式の成立を仮定すれば, $n = k+1$ のときもこの等式は成り立つ.

①, ② から数学的帰納法により, この等式は $n = 1, 2, 3, \dots$ において成立する.

★ ペアノの公理 (*Peano axioms*) 自然数の公理

自然数は次の5つの条件を満たす.

- ① 自然数0が存在する.
- ② 任意の自然数 a にはその後者 (*successor*), $suc(a)$ が存在する ($suc(a)$ は $a+1$ の意).
- ③ 0 はいかなる自然数の後者でもない (0 より前の自然数は存在しない).
- ④ 異なる自然数は異なる後者を持つ. $a \neq b$ のとき $suc(a) \neq suc(b)$ となる.
- ⑤ 0 がある性質を満たし, a がある性質を満たせばその後者 $suc(a)$ もその性質を満たすとき, すべての自然数はその性質を満たす.

この5番目が「数学的帰納法」の原理である.

日本の高校数学では, 自然数を $1, 2, 3, \dots$ としているが, ペアノの公理では, $0, 1, 2, 3, \dots$ としている.